Révisions R6

Forces centrales

BLAISE PASCAL
PT 2024-2025

Ressources en ligne

Scanner ou cliquer sur les QR-code pour accéder aux ressources.

Cartes mémo, réalisées par C. Cayssiols.

Vidéos, réalisées par JJ. Fleck.
Les vidéos « l'essentiel » et « démonstrations principales » sont très adpatées à des révisions.

QCM d'applications.
Choisir d'abord le mode « j'apprends » puis éventuellement le mode « je révise ».

Les deux dernières ressources correspondent au programme de PCSI, un peu plus vaste que celui de PTSI : me demander en cas de doute sur ce que vous devez savoir ou pas.

Rappels de cours

A - Caractéristiques générales des mouvements dans un champ newtonien

Considérons le cas d'une force centrale dont la norme décroît en $1/r^2$ (on parle de champ newtonien), principalement la force de gravitation exercée par un astre central de masse m_0 (p.ex. le Soleil) sur un autre astre de masse m qui orbite autour de lui (p.ex. la Terre),

$$\vec{F}_\mathrm{g} = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{r^2}\vec{e}_r\,.$$

- **Conservation du moment cinétique :** $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{F} = r\,\vec{e}_r\wedge F_r\,\vec{e}_r = \vec{0}$ donc $\vec{L}_O = \overrightarrow{\mathrm{cte}}$.
  - ▷ *Conséquence 1 :* le mouvement est plan car $\overrightarrow{OM}\perp\vec{L}_O = \overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v}$ à cause du produit vectoriel ;
  - ▷ *Conséquence 2 :* loi des aires
    - → constante des aires : $\boxed{C = r^2\dot\theta = \mathrm{cte}}$ car $\vec{L}_O = mr^2\dot\theta\,\vec{e}_z$;
    - → l'aire balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ pendant une durée Δt est proportionnelle à Δt, mais ne dépend pas de $r = OM$.

- **Énergie potentielle effective :**

▷ C'est une astuce pour utiliser ce qu'on sait sur les mouvement conservatifs à une dimension alors que le mouvement est à deux dimensions.

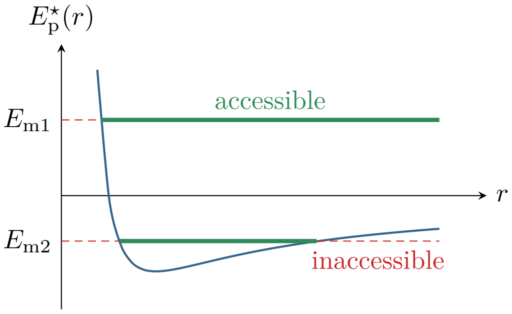
▷ Idée : utiliser la constante des aires pour remplacer $\dot\theta$ dans l'énergie cinétique par C/r^2, et interpréter le terme correspondant comme une énergie potentielle effective.

$$E_\mathrm{m} = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot r^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot\theta^2}_{=E_\mathrm{c}} + E_\mathrm{p}(r) = \frac{1}{2}m\dot r^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_\mathrm{p}(r)}_{=E_\mathrm{p}^\star(r)}\,.$$

- **Positions accessibles à l'astre en orbite :** en fonction de son énergie mécanique initiale.

▷ Comme $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 > 0$, tous les r tels que $E_\mathrm{p}^\star(r) < E_\mathrm{m}$ sont accessibles.

▷ Sur une courbe d'énergie potentielle effective :



→ Une particule qui peut partir à l'infini ($E_\mathrm{m} \geq 0$) est dite dans un **état de diffusion** ;

→ Si le domaine accessible est borné ($E_\mathrm{m} < 0$), elle est dite dans un **état lié**.

- **Géométrie des trajectoires :** ce sont toujours des coniques (cercle, ellipse, parabole, hyperbole).

▷ Toutes les trajectoires liées sont circulaires ou elliptiques.

▷ Point le plus proche du centre de force : périgée/périhélie ; point le plus éloignée : apogée/aphélie.

B - Système solaire et satellites

- **Lois de Kepler :**
  - ▷ *Loi des orbites :* les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil est un des foyers ;
  - ▷ *Loi des aires :* les aires balayées par le segment Soleil-planète pendant des durées égales sont égales, et identiques pour toutes les planètes ;
  - ▷ *Loi des périodes :* $T^2/a^3 = \text{cte}$ indépendante de la planète, avec T la période de révolution et a le demi-grand axe de l'ellipse.

- **Une orbite circulaire est parcourue à vitesse constante :** $E_\mathrm{m} = \text{cte}$ et $E_\mathrm{p} = \text{cte}$ car $r = \text{cte}$ donc $E_\mathrm{c} = \text{cte}$.

- **Vitesse en orbite circulaire :** TRC appliqué à la planète en mouvement circulaire uniforme.

▷ *Méthode 1 : dans la base de Frénet.*

Attention ! Le vecteur normal $\vec{u}_N$ est dirigé vers *l'intérieur* de la trajectoire, donc à $\vec{u}_N = -\vec{e}_r$ alors que $\vec{u}_T = \vec{e}_\theta$. D'après le PFD,

$$m\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u}_T + m\frac{v^2}{R}\vec{u}_N = +\mathcal{G}\frac{m_0 m}{R^2}\vec{u}_N \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{v = \sqrt{\frac{m_0\mathcal{G}}{R}}\,.}$$

La projection sur $\vec{u}_T$ permet de montrer que $v = \text{cte}$, c'est-à-dire que le mouvement est uniforme.

▷ *Méthode 2 : dans la base polaire.*

$$m\vec{a} = -mR\dot{\theta}^2\vec{e}_r + mR\ddot{\theta}\vec{e}_\theta = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{R^2}\vec{e}_r$$

La projection sur $\vec{e}_\theta$ donne $\ddot{\theta} = 0$ donc $\dot{\theta} = \text{cte}$, donc $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \text{cte}$. En remplaçant $\dot{\theta}^2 = v^2/R^2$, on obtient

$$-m\frac{v^2}{R} = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{R^2} \qquad \rightsquigarrow \qquad \boxed{v = \sqrt{\frac{m_0\mathcal{G}}{R}}\,.}$$

- **Troisième loi de Kepler :** Comme le mouvement est uniforme, la période vaut $T = 2\pi r/v$, puis on retrouve la troisième loi de Kepler, qui se généralise aux ellipses en remplaçant R par a,

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{m_0\mathcal{G}}\,.}$$

- **Vitesses cosmiques :**

▷ *Première vitesse cosmique* v_1 = vitesse en orbite circulaire basse autour de la Terre, $R = R_\mathrm{T}$.
→ vitesse minimale à donner à un satellite pour qu'il ne retombe pas sur Terre.

▷ *Seconde vitesse cosmique* v_2 = vitesse de libération = vitesse minimale à donner à un satellite pour qu'il puisse quitter l'attraction gravitationnelle.
→ limite entre état lié et état de diffusion pour $E_\mathrm{m} = 0$ donc comme il est lancé depuis la Terre

$$E_\mathrm{m} = 0 = \frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{\mathcal{G}M_\mathrm{T}m}{R_\mathrm{T}} \qquad \rightsquigarrow \qquad v_2 = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}}}$$

- **Orbite géostationnaire :**

▷ Satellite immobile dans le référentiel terrestre ... mais qu'il faut étudier dans le référentiel géocentrique ;
▷ Le plan de la trajectoire contient forcément le centre de la Terre, il ne peut donc s'agir que du plan équatorial ;
▷ Vitesse angulaire = vitesse de rotation de la Terre ;
▷ Rayon de l'orbite : se trouve avec la troisième loi de Kepler.

Applications de cours

Seuls les étudiants du groupe de TD PT⋆ seront interrogés en colle sur les questions marquées d'une étoile, car elles sont plus techniques et/ou moins essentielles ... mais tous les étudiants sont bien sûr invités à les travailler !

(★) R6.1 - Dans le cas d'un champ central quelconque, établir la conservation du moment cinétique et ses conséquences (planéité du mouvement et loi des aires).

(★) R6.2 - En considérant le champ gravitationnel, construire l'énergie potentielle effective adaptée et l'utiliser pour discuter de la nature des trajectoires en fonction de la valeur de l'énergie mécanique.

R6.3 - Dans le cas particulier d'un mouvement circulaire dans le champ gravitationnel, montrer que le mouvement est uniforme et établir sa vitesse.

> *L'étudiant pourra utiliser au choix la base polaire ou la base de Frénet.*

R6.4 - Dans le cas particulier d'un mouvement circulaire dans le champ gravitationnel, établir la troisième loi de Kepler et la généraliser au cas d'une trajectoire elliptique. L'expression de la vitesse en orbite circulaire pourra être admise ou redémontrée.

Pour s'entraîner

Difficulté d'analyse et compréhension, initiative requise ;
Difficulté technique et calculatoire ;
Exercice important.

Flasher ou cliquer pour accéder au corrigé

Exercice 1 : Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène — 1 | 2 |

▷ *Caractéristiques d'une orbite circulaire ;*
▷ *Énergie mécanique.*

L'expérience de Rutherford a prouvé qu'un atome avait une structure lacunaire, composée essentiellement de vide. Ernest Rutherford propose donc un modèle planétaire de l'atome d'hydrogène, où l'électron (masse m, charge $-e$) est en orbite circulaire de rayon r autour d'un proton P (charge $+e$) qu'on supposera fixe dans le référentiel d'étude.

Données :

▷ constante de Planck $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$;
▷ vitesse de la lumière dans le vide $c = 3{,}0 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$;
▷ permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$;
▷ charge élémentaire $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$;
▷ masse de l'électron $m = 9{,}1 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{kg}$;
▷ $1{,}0\,\mathrm{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

1 - Exprimer la force exercée par le proton sur l'électron. En déduire l'énergie potentielle à laquelle est soumis l'électron.

2 - Déterminer la relation entre la vitesse v de l'électron et le rayon r de l'orbite, puis exprimer l'énergie mécanique de l'électron en fonction du rayon r de l'orbite.

3 - Relier l'énergie potentielle de l'électron à son énergie mécanique.

Pour rendre compte du spectre de raies discret de l'atome d'hydrogène et de sa stabilité, Niels Bohr postule que l'électron ne peut occuper que certaines orbites stables de rayons r_n tel que le moment cinétique de l'électron par rapport au point P vérifie une condition de quantification

$$L_P(n) = n\hbar$$

où n est un entier naturel non nul appelé nombre quantique principal et $\hbar = h/2\pi$ la constante de Planck réduite.

4 - Exprimer le moment cinétique de l'électron L_P en fonction de r_n seulement.

5 - En déduire en fonction de n les rayons r_n des orbites permises pour l'électron.

6 - Montrer alors que l'énergie mécanique de l'électron peut s'écrire sous la forme

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}\,.$$

Calculer numériquement E_0.

7 - La condition de quantification peut également s'interpréter en termes d'ondes de matière. Rappelons que la longueur d'onde de de Bröglie associée à une particule se déplaçant à la vitesse v vaut $\lambda = h/mv$. Montrer que la condition de quantification peut s'écrire sous la forme

$$2\pi r_n = n\lambda\,.$$

Comment interpréter cette condition en termes ondulatoires ?

Exercice 2 : Gravity

exemple officiel CCINP | 2 | 2 |

- *Loi de Kepler ;*
- *Orbite circulaire et elliptique ;*
- *Conservation de l'énergie mécanique.*

Dans le film Gravity, des astronautes effectuent une mission de maintenance sur le télescope spatial Hubble lorsque leur navette est détruite. Leur seul espoir semble être de rejoindre la Station spatiale internationale, l'ISS. Le but de cet exercice est de définir dans quelles conditions ce voyage spatial est possible.

On suppose que le télescope Hubble et l'ISS sont en orbite circulaire basse autour de la terre, respectivement à 600 km et 400 km au-dessus de la Terre, dans le même plan. Le rayon de la terre est $R_\mathrm{T} = 6400\,\mathrm{km}$; $\mathcal{G}$ est la constante universelle de gravitation.

1 - Exprimer la force de gravitation exercée par la Terre, de masse M_0, sur l'astronaute et son équipement, de masse m. Donner l'expression de l'énergie potentielle de gravitation.

2 - En exprimant le principe fondamental de la dynamique pour un système en rotation uniforme, établir la troisième loi de Kepler. Exprimer l'énergie de l'astronaute sur son orbite, en fonction de $\mathcal{G}$, m, M_0 et r, rayon de l'orbite.

3 - Déterminer numériquement la période T_S de l'ISS, sachant que la période du télescope vaut $T_\mathrm{H} = 97\,\mathrm{min}$. En déduire numériquement la vitesse du télescope v_H, puis celle de la station spatiale v_S sur leur orbite respective.

Pour rejoindre la station spatiale, l'astronaute envisage une orbite de transfert elliptique, dont l'apogée de distance r_H par rapport au centre de la Terre est sur l'orbite du télescope, et le périgée de distance r_S par rapport au centre de la terre est sur l'orbite de l'ISS.

4 - Représenter la trajectoire suivie par l'astronaute.

5 - Exprimer l'énergie de l'astronaute sur cette trajectoire en fonction de $\mathcal{G}$, M_0, m, r_H et r_S.

6 - Exprimer la vitesse de l'astronaute à l'apogée, en fonction de r_H, T_H et r_S. Par analogie, en déduire l'expression de la vitesse au périgée en fonction de r_S, T_S et r_H. Calculer les valeurs numériques. Techniquement comment l'astronaute peut-il gérer sa vitesse ?

7 - Quelle est la durée de ce voyage ?

Exercice 3 : Frottements sur un satellite en orbite basse

oral banque PT | 3 | 2

- *Conservation du moment cinétique ;*
- *Orbite circulaire ;*
- *Énergie mécanique.*

On étudie le mouvement d'un satellite artificiel S en orbite autour de la Terre dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen. On note M la masse de la Terre, $m \ll M$ la masse du satellite et G la constante de gravitation universelle.

Données : $M = 6{,}0 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$; rayon terrestre $R = 6{,}4 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$; $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$.

Dans un premier temps, on néglige les autres interactions que la force de gravitation entre la Terre et le satellite, et on suppose l'orbite circulaire de rayon r parcourue à la vitesse angulaire ω.

1 - Établir l'expression de la vitesse v du satellite en fonction de G, M et r.

2 - Exprimer successivement l'énergie potentielle, l'énergie cinétique et l'énergie mécanique du satellite.

Les satellites en orbite basse subissent des frottements de la part des hautes couches de l'atmosphère. Ces frottements limitent la durée du vie des satellites en les faisant lentement chuter sur Terre. Ainsi, un satellite situé sur une orbite à 1000 km d'altitude descend d'environ 2 m par jour. On modélise l'action des hautes couches de l'atmosphère par une force de frottement quadratique proportionnelle à la masse du satellite,

$$\overrightarrow{f} = -\lambda m v \overrightarrow{v} \,.$$

Cette force est suffisamment faible pour que la trajectoire demeure quasi-circulaire : les expressions obtenues pour une orbite circulaire demeurent valables, mais le rayon r de l'orbite varie lentement au cours du temps.

3 - À l'aide d'un théorème énergétique, établir l'équation différentielle vérifiée par r.

4 - Sans résoudre cette équation, montrer que les frottements font bien descendre le satellite. En déduire un résultat surprenant concernant l'effet des frottements sur la vitesse du satellite.

5 - Déterminer l'évolution de r en fonction du temps. En déduire l'expression et la valeur numérique du coefficient de frottement λ.