

Premier principe

Analyse de corrigé

Exercice 1 : Explosion dans un piston

🧠 2 | ✂ 2 | ⚙



- Gaz parfait ;
- Diagramme de Watt ;
- Loi de Laplace.

Correction des questions d'analyse du corrigé

Question d'analyse 1 - Phase ① : isochore $V = \text{cte}$ donc verticale. Phase ② : adiabatique réversible, donc d'après la loi de Laplace $P = \text{cte}/V^\gamma$. Phase ③ : isobare $P = \text{cte}$ donc horizontale.

Question d'analyse 2 - On a deux inconnues T_1 et P_1 , et il n'y a pas de condition d'équilibre thermique ou mécanique entre le système et l'environnement. L'équation d'état donne une relation, mais il en faut une deuxième.

Question d'analyse 3 - Non : la transformation est bien monobare, mais le système n'est à l'équilibre mécanique avec son environnement ni dans l'état initial ni dans l'état final.

Question d'analyse 4 - La transformation est isochore.

Question d'analyse 5 - L'énoncé dit que le piston est repoussé « brutalement », c'est donc que la transformation est rapide.

Question d'analyse 6 - La relation est écrite entre l'état initial de la phase ② $P_1, V_1 = V_0$ et l'état final de cette phase $P_2 = P_0, V_2$.

Question d'analyse 7 - Oui, mais ce n'est pas pratique car il aurait fallu calculer le travail des forces pressantes. La loi de Laplace donne le résultat bien plus facilement.

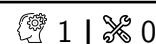
Question d'analyse 8 - La phase ③ est une transformation monobare et, cette fois, le gaz est en équilibre mécanique avec son environnement dans l'état initial et dans l'état final (et même tout au long de la transformation!).

Question d'analyse 9 - Oui, mais il aurait fallu calculer le travail des forces pressantes ... ce qui n'est pas très compliqué ici car la transformation est isobare.

Question d'analyse 10 - L'énergie ne peut pas disparaître ☺ Le gaz retrouvant son état initial à l'issue de la transformation, il ne peut pas l'avoir gardée. Cette énergie supplémentaire a elle aussi été restituée à l'environnement, mais sous forme de travail au cours de la phase ②.

Transformations finies

Exercice 2 : Capacité thermique massique du cuivre



- Phase condensée idéale ;
- Calorimétrie.

Le système considéré est constitué du calorimètre, de l'eau qu'il contient et du barreau de cuivre. La transformation dans le calorimètre peut être considérée comme adiabatique, et comme il n'y a pas de travail indiqué fourni au système, le premier principe donne

$$\Delta H = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{Q} + W_i = 0.$$

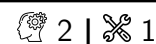
Par additivité de l'enthalpie, la variation totale d'enthalpie est la somme de celles de l'eau, du calorimètre et du métal. Comme il s'agit de phases condensées changeant de température, on a

$$\Delta H = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{additivité}}}{\Delta H_{\text{eau}} + \Delta H_{\text{calo}} + \Delta H_{\text{Cu}}} = m_{\text{eau}} c_{\text{eau}} (T_F - T_{\text{eau}}) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ph.cond.}}}{\mu} c_{\text{eau}} (T_F - T_{\text{eau}}) + m_{\text{Cu}} c_{\text{Cu}} (T_F - T_{\text{Cu}})$$

en décrivant le calorimètre par sa valeur en eau μ . Finalement,

$$c_{\text{Cu}} = \frac{(m_{\text{eau}} + \mu) c_{\text{eau}} (T_{\text{eau}} - T_F)}{m_{\text{Cu}} (T_F - T_{\text{Cu}})} = 9,8 \cdot 10^2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Exercice 3 : Échauffement des freins d'un véhicule



- Phase condensée idéale ;
- Prise en compte de l'énergie mécanique.

Raisonnons sur le système constitué de la voiture « entière », incluant les freins. La seule action mécanique intervenant dans le problème est interne au système, qui n'échange ni travail ni transfert thermique avec son environnement. En notant m la masse d'un disque de frein, le bilan d'énergie totale au cours de la transformation s'écrit

$$\Delta U + \Delta E_c + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{transf}}}{\cancel{\Delta E_p}} = 4m c \Delta T + \left(0 - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{\frac{1}{2} MV^2} \right) = 0.$$

On en déduit

$$\Delta T = \frac{MV^2}{8m c} = \frac{MV^2}{8 \pi R^2 e \rho c} = 43^\circ \text{C}$$

en prenant garde à convertir $V = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Exercice 4 : Différentes compressions d'un gaz parfait



- Gaz parfait ;
- Travail des forces de pression ;
- Loi de Laplace.

1.a Il s'agit de réunir en une seule force équivalente le poids de la masse posée sur le piston et la force pressante exercée par l'air extérieur :

$$P_{\text{app}} S = P_0 S + mg = 2P_0 S \quad \text{d'où} \quad \boxed{P_{\text{app}} = 2P_0.}$$

1.b L'environnement étant de température constante, la transformation est **monotherme**. La pression apparente subie par le système étant constante, elle est aussi **monobare**. La condition d'équilibre thermique et mécanique dans l'état final donne directement

$$T_1 = T_0 \quad \text{et} \quad P_1 = P_{\text{app}} = 2P_0.$$

La condition d'équilibre mécanique se retrouve si nécessaire en appliquant le PFD au piston, au repos dans l'état final sous l'effet des trois forces de pression intérieure et extérieure et du poids.

On en déduit le volume d'après l'équation d'état,

$$P_1 V_1 = P_0 V_0 \quad \text{d'où} \quad V_1 = \frac{V_0}{2}.$$

Trouver $V_1 < V_0$ est rassurant puisqu'il s'agit d'une compression ! Le travail reçu par le gaz s'écrit

$$W_1 = - \int_{01} P_{\text{app}} dV = -2P_0(V_1 - V_0) \quad \text{soit} \quad W_1 = P_0 V_0,$$

On trouve $W > 0$, ce qui est cohérent puisqu'il s'agit d'une compression. Enfin, le bilan d'énergie interne s'écrit

$$\Delta U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} C_V \underbrace{(T_1 - T_0)}_{=0} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} W_1 + Q_1 \quad \text{d'où} \quad Q_1 = -P_0 V_0,$$

ce qui signifie que le gaz fournit un transfert thermique à son environnement.

Bien que la transformation soit monobare, il n'est pas possible d'utiliser l'enthalpie ici car il n'y a pas d'équilibre mécanique entre le gaz et l'environnement à l'état initial. Le gaz est initialement à P_0 , alors que tout se passe comme si l'environnement était à $P_{\text{app}} = 2P_0$.

1.c La transformation est cette fois **adiabatique** et **monobare**.

Elle est aussi toujours monotherme, mais c'est sans importance puisque la température extérieure ne joue aucun rôle en raison des parois calorifugées.

La condition d'équilibre mécanique dans l'état final et d'adiabaticité donnent

$$P_2 = P_{\text{app}} = 2P_0 \quad \text{et} \quad Q_2 = 0.$$

Il reste alors trois inconnues à déterminer, T_2 , V_2 et W_2 , qui sont reliées par trois équations. La première est bien sûr l'équation d'état,

$$P_2 V_2 = nRT_2 \quad \text{soit} \quad 2P_0 V_2 = nRT_2.$$

La deuxième équation vient du calcul du travail, identique au cas précédent, qui donne

$$W_2 = -2P_0(V_2 - V_0).$$

Enfin, la troisième équation est donnée par le bilan d'énergie interne, qui s'écrit

$$\Delta U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} C_V(T_2 - T_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} W_2 + \cancel{Q_2}.$$

On en déduit, par exemple,

$$C_V(T_2 - T_0) = -2P_0 V_2 + 2P_0 V_0 = -nRT_2 + 2nRT_0 \quad \text{soit} \quad \left(\frac{3}{2}nR + nR\right) T_2 = \left(2nR + \frac{3}{2}nR\right) T_0$$

et finalement

$$T_2 = \frac{7}{5} T_0.$$

Il en découle naturellement

$$V_2 = \frac{\frac{7}{5}nRT_0}{2P_0} \quad \text{soit} \quad \boxed{V_2 = \frac{7}{10}V_0}$$

qu'il est rassurant de trouver inférieur à V_0 puisque le gaz est comprimé ! Enfin,

$$W_2 = -2P_0(V_2 - V_0) = -2P_0\left(\frac{7}{10} - 1\right)V_0 \quad \text{soit} \quad \boxed{W_2 = \frac{7}{5}P_0V_0.}$$

Trouver $W_2 > 0$ est normal pour une compression.

Penser à faire des tests de vraisemblance : pour une compression où le piston enfonce le gaz, il est logique de trouver $V_2 < V_0$ et $W_2 > 0$ (il faut appuyer). Même si c'est moins intuitif, il est également logique de trouver $T_2 > T_0$: une compression adiabatique conduit toujours à un échauffement, rappelez-vous du coton qui prend feu.

2.a Le fait que la masse soit ajoutée très lentement « grain à grain » permet de considérer la transformation **quasi-statique**. Ainsi, elle est non seulement monotherme, mais aussi **isotherme**, puisque l'équilibre thermique a le temps d'être atteint tout au long de la transformation. La transformation est donc également **réversible**. En revanche, on ne peut rien dire d'intéressant sur la pression, puisque la pression apparente ressentie par le système change au cours de la transformation.

Pour comprendre la réversibilité, on peut constater qu'elle l'est mécaniquement (on va lentement), mais aussi thermiquement. En utilisant le critère du film à l'envers, si on retire les grains de sable les uns après les autres il est crédible de voir le piston remonter.

La condition d'équilibre thermique dans l'état final donne directement

$$\boxed{T_3 = T_0}$$

et puisque la masse totale de grains ajoutée est inchangée, on a également

$$\boxed{P_3 = 2P_0 \quad \text{et} \quad V_3 = \frac{V_0}{2}.}$$

Comme la transformation est mécaniquement réversible, $P_{\text{app}} = P$, et le travail reçu par le gaz s'écrit

$$W_3 = - \int_{03} P dV = - \int_{03} \frac{nRT_0}{V} dV = -nRT_0 \int_{V_0}^{V_3} \frac{dV}{V} \quad \text{d'où} \quad \boxed{W_3 = -nRT_0 \ln \frac{V_3}{V_0} = nRT_0 \ln 2.}$$

Le bilan d'énergie interne donne enfin

$$\Delta U = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{0} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{Q_3} + W_3 \quad \text{d'où} \quad \boxed{Q_3 = -nRT_0 \ln 2.}$$

Toujours les mêmes tests de vraisemblance pour une compression : $V_3 < V_0$, $P_3 > P_0$ et $W_3 > 0$.

2.b La transformation est maintenant **adiabatique** et **réversible**. La condition d'équilibre mécanique dans l'état final conduit comme depuis le début de l'exercice à

$$\boxed{P_4 = 2P_0}$$

et on peut en déduire le volume et la température par la loi de Laplace,

$$P_4 V_4^\gamma = P_0 V_0^\gamma \quad \text{soit} \quad V_4 = \left(\frac{P_0}{P_4}\right)^{1/\gamma} V_0 \quad \text{et} \quad \boxed{V_4 = 2^{-1/\gamma} V_0,}$$

puis

$$T_4^\gamma P_4^{1-\gamma} = T_0^\gamma P_0^{1-\gamma} \quad \text{soit} \quad T_4 = \left(\frac{P_0}{P_4}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} T_0 \quad \text{et} \quad \boxed{T_4 = 2^{(\gamma-1)/\gamma} T_0.}$$

La transformation étant adiabatique et les températures connues, le plus simple pour calculer le travail est de passer par un bilan d'énergie interne,

$$\Delta U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} C_V(T_4 - T_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} W_4 + \cancel{Q_4} \quad \text{d'où} \quad \boxed{W_4 = \frac{3}{2} nR \left(2^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right) T_0 .}$$

Il est bien sûr également possible de passer par le calcul explicite de l'intégrale définissant le travail ... mais c'est excessivement plus lourd en termes de calcul !

$$W_4 = - \int_{04} P dV = - \int_{04} \frac{P_0 V_0^\gamma}{V^\gamma} dV = -P_0 V_0^\gamma \int_{V_0}^{V_4} \frac{dV}{V^\gamma} = \dots$$

Aboutir exactement au même résultat nécessite d'utiliser la valeur numérique $\gamma = 5/3$ pour un gaz parfait monoatomique.

Exercice 5 : C'est l'histoire d'un gaz parfait et d'un piston



- ▷ Gaz parfait ;
- ▷ Travail des forces de pression.

1 La transformation étant lente, on peut supposer que l'équilibre thermique entre le gaz et son environnement est atteint à tout instant, et donc que la température du gaz reste constamment égale à celle de l'environnement.

2 D'après l'équation d'état,

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 V_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{initial}}}{=} nRT_0 \\ P_1 \times 2V_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{final}}}{=} nRT_0 \end{array} \right. \quad \text{d'où} \quad \boxed{P_1 = \frac{P_0}{2} .}$$

3 La transformation étant lente, elle est mécaniquement réversible : on a donc $P = P_{\text{app}}$, avec P_{app} la pression extérieure apparente ressentie par le gaz (qui inclut donc l'effet de la force $\vec{F}$ exercée par l'opérateur ... mais on n'a pas besoin de s'en soucier). Le travail reçu par le gaz vaut alors

$$W = - \int P_{\text{app}} dV \underset{\substack{\uparrow \\ \text{méca.rév}}}{=} - \int P dV \underset{\substack{\uparrow \\ \text{isoT}}}{=} - \int \frac{nRT_0}{V} dV = -nRT_0 \int_{V_0}^{2V_0} \frac{dV}{V} \quad \text{soit} \quad W = -nRT_0 \ln 2 .$$

Le bilan d'énergie interne s'écrit

$$\Delta U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} C_V(T_0 - T_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} W + Q \quad \text{d'où} \quad \boxed{Q = +nRT_0 \ln 2 .}$$

Trouver $Q > 0$ signifie que le gaz reçoit un transfert thermique de la part de l'environnement.

4 Si la transformation est « brusque », cela laisse entendre cette fois que les transferts thermiques n'ont pas le temps de se faire, et donc que la transformation peut raisonnablement être modélisée par une adiabatique. En utilisant le critère du film à l'envers, il ne serait pas du tout crédible que le volume du cylindre augmente spontanément (aucune force n'est exercée sur le piston) alors que la pression y est « de plus en plus inférieure » à la pression extérieure. La transformation ne peut donc qu'être irréversible.

De manière un peu plus rigoureuse, le temps caractéristique des transferts thermiques au travers des parois du cylindre est largement supérieur au temps caractéristique de la transformation.

5 Dans l'état ②, le gaz est en équilibre mécanique avec l'environnement, donc

$$\boxed{P_2 = P_0 .}$$

Par ailleurs, d'après l'équation d'état,

$$\begin{cases} P_0 V_0 = nRT_0 \\ P_0 V_2 = nRT_2 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \frac{V_2}{V_0} = \frac{T_2}{T_0}. \quad (1)$$

Enfin, procédons au bilan d'énergie interne. La transformation est adiabatique par hypothèse et monobare ($P_{\text{ext}} = P_0 = \text{cte}$), d'où

$$\Delta U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} C_V(T_2 - T_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} W' + Q' \quad \text{avec} \quad W' = - \int_{2V_0}^{V_2} P_0 dV = -P_0(V_2 - 2V_0)$$

ce qui permet d'écrire

$$C_V(T_2 - T_0) = P_0(2V_0 - V_2). \quad (2)$$

On aboutit donc à un système de deux équations (1) et (2) à deux inconnues T_2 et V_2 .

La démarche pour aboutir à ce genre de système mérite d'être retenue : d'abord on identifie les grandeurs finales évidentes compte tenu des hypothèses faites sur la transformation, puis on écrit l'équation d'état, et si ce n'est pas suffisant l'équation manquante est donnée par le premier principe.

Attention, bien que la transformation soit monobare, le premier principe ne peut pas s'écrire en enthalpie car il n'y a pas équilibre mécanique entre le gaz et l'environnement à l'état initial, juste après que l'opérateur ait lâché le piston.

En divisant (2) par $nRT_0 = P_0 V_0$, puis en utilisant (1),

$$\frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{T_2}{T_0} - 1 \right) = 2 - \frac{V_2}{V_0} = 2 - \frac{T_2}{T_0}$$

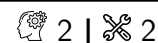
On en déduit

$$T_2 = \left(2 - \frac{1}{\gamma} \right) T_0 \quad \text{et} \quad V_2 = \left(2 - \frac{1}{\gamma} \right) V_0.$$

6 D'après la relation de Mayer, $C_P = C_V + nR$ donc $C_P > C_V$ et $\gamma > 1$. On a donc $2 - 1/\gamma > 1$: par conséquent,

$$V_2 > V_0.$$

Exercice 6 : Transformation affine dans le diagramme de Watt



- Gaz parfait ;
- Diagramme de Watt ;
- Travail des forces de pression.

1 D'après l'équation d'état des gaz parfaits, on a $T_I = T_F = T_0$.

2 Les isothermes dans le diagramme de Watt sont des hyperboles, puisque

$$P = \frac{nRT}{V} = \frac{\text{cte}}{V}.$$

Une droite n'étant pas une hyperbole, la transformation n'est pas isotherme. Plus les isothermes sont hautes dans le diagramme de Watt, plus la température associée est élevée (facile à voir en raisonnant à V fixé) : on déduit graphiquement de la température passe par un maximum au cours de l'expérience, la température maximale correspondant à celle de l'isotherme tangente à la courbe représentant la transformation, comme schématisé figure 1.

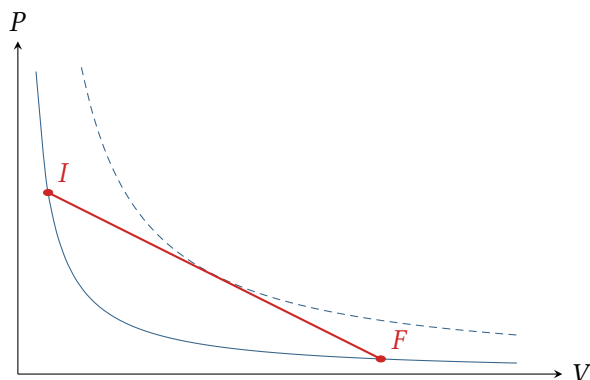


Figure 1 – Représentation de la transformation dans le diagramme de Watt.

- 3 La courbe de la transformation est une droite, donc l'équation s'écrit

$$P = \alpha V + \beta$$

avec

$$\begin{cases} P_0 = \alpha V_0 + \beta \\ P_0/k = \alpha kV_0 + \beta \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{P_0}{kV_0} \\ \beta = \frac{1+k}{k}P_0 \end{cases}$$

soit finalement

$$P = -\frac{P_0}{k} \frac{V}{V_0} + \frac{1+k}{k} P_0$$

- 4 La transformation étant mécaniquement réversible,

$$\begin{aligned} W_P &= - \int_{V_I}^{V_F} P(V) dV \\ &= - \int_{V_I}^{V_F} (\alpha V + \beta) dV \\ &= - \left[\alpha \frac{V^2}{2} + \beta V \right]_{V_I}^{V_F} \\ &= -\frac{\alpha}{2} (V_F^2 - V_I^2) - \beta (V_F - V_I) \\ &= +\frac{P_0}{2kV_0} (k^2 - 1) V_0^2 - \frac{1+k}{k} P_0 (k-1) V_0 \\ &= \frac{(k-1)(k+1)}{2k} P_0 V_0 - \frac{(k+1)(k-1)}{k} P_0 V_0 \\ W_P &= -\frac{(k+1)(k-1)}{2k} P_0 V_0. \end{aligned}$$

Le travail des forces pressantes est négatif, ce qui est logique car il s'agit d'une détente. Le bilan d'énergie de la transformation s'écrit

$$\Delta U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er}}}{=} W_P + Q \underset{\substack{\uparrow \\ \text{GP}}}{=} C_V \Delta T = 0 \quad \text{d'où} \quad Q = -W_P \neq 0.$$

La transformation ne peut donc **pas être adiabatique**.

- 5 La température $T_{\max}$ est celle pour laquelle l'isotherme associée n'a qu'un seul point d'intersection avec la courbe représentant la transformation. Les points d'intersection d'une isotherme avec la courbe de la transformation vérifient

$$\alpha V + \beta = \frac{nRT}{V} \quad \text{soit} \quad \alpha V^2 + \beta V - nRT = 0.$$

La température $T_{\max}$ est donc celle pour laquelle cette équation d'inconnue V n'admet qu'une seule solution, c'est-à-dire pour laquelle le discriminant est nul, soit

$$\beta^2 + 4 \times \alpha \times nRT_{\max} = 0 \quad \text{d'où} \quad T_{\max} = -\frac{\beta^2}{4\alpha nR}.$$

En reprenant les expressions de β et α , on trouve

$$T_{\max} = \frac{(1+k)^2 P_0^2}{4k^2 \times \frac{P_0}{kV_0} \times nR} = \frac{(1+k)^2 P_0 V_0}{4k} \frac{1}{nR}$$

ce qui donne finalement

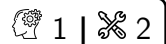
$$T_{\max} = \frac{(1+k)^2}{4k} T_0.$$

On peut vérifier que $T_{\max}$ est bien supérieur à T_0 . En effet,

$$\frac{(1+k)^2}{4k} > 1 \iff k^2 - 2k + 1 > 0 \iff (k-1)^2 > 0$$

ce qui est vrai dès que k est non nul. On montre également au passage qu'une compression ($k < 1$) affine dans le diagramme de Watt se fait aussi en passant par une température maximale, les calculs étant formellement identiques en tout point.

Exercice 7 : Transformation polytropique



- ▷ Gaz parfait ;
- ▷ Travail des forces de pression ;
- ▷ Loi de Laplace.

- 1** ▷ $k = 0$ donne $P = \text{cte}$: transformation **isobare** ;
- ▷ $k = 1$ donne $PV = nRT = \text{cte}$ c'est-à-dire $T = \text{cte}$ car le système est fermé : transformation **isotherme** ;
- ▷ $k = \gamma$ donne la loi de Laplace, valable pour une transformation **adiabatique réversible** ;
- ▷ $k = +\infty$ donne $V = \text{cte}$ (si V n'est pas constant, une infime variation de volume a des effets infinis et la constante ne peut plus être gardée constante ... on peut aussi raisonner en passant au $\ln$), c'est-à-dire une **isochore**.
- 2** Par définition, on a tout au long de la transformation $PV^k = P_0 V_0^k$ donc $P = P_0 (V_0/V)^k$. En supposant la transformation mécaniquement réversible, $P = P_{\text{ext}}$, et le travail reçu entre E_0 et E_1 vaut donc

$$W = - \int_{E_0 E_1} P dV = - \int_{E_0 E_1} P_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^k dV = -P_0 V_0^k \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V^k} = -P_0 V_0^k \frac{V_1^{1-k} - V_0^{1-k}}{1-k}$$

ce qui donne finalement en utilisant la propriété polytropique ($P_0 V_0^k = P_1 V_1^k$) puis de gaz parfait

$$W = \frac{1}{k-1} (P_1 V_1 - P_0 V_0) = \frac{nR}{k-1} (T_1 - T_0).$$

- 3** Le bilan d'énergie s'écrit

$$\Delta U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} W + Q \underset{\substack{\uparrow \\ \text{GP}}}{=} C_V \Delta T \quad \text{d'où} \quad Q = C_V \Delta T - \frac{nR}{k-1} \Delta T,$$

ce qui donne le résultat voulu en remplaçant C_V ,

$$Q = nR \left(\frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{k-1} \right) \Delta T.$$

4 Pour $k = 0$, on a identifié une transformation isobare. On a dans ce cas

$$Q = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} \Delta T = C_P \Delta T$$

ce qui permet d'identifier avec le premier principe en enthalpie,

$$\Delta H = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{W_{\cancel{p}}} + Q = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{GP}}}{C_P} \Delta T$$

ce qui donne bien la relation connue pour un gaz parfait.

Pour $k = 1$, on a identifié une transformation isotherme. L'expression obtenue pour Q donne alors une forme indéterminée mathématiquement ($k - 1 = 0$ et $\Delta T = 0$), ce qui signifie que le système peut échanger n'importe quel transfert thermique sans que cela ne change sa température : c'est donc bien cohérent.

On peut aussi renverser l'expression et isoler ΔT , on voit alors que $\Delta T = 0$ quel que soit le transfert thermique Q .

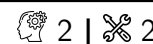
Pour $k = \gamma$, on trouve $Q = 0$: la transformation est adiabatique, ce qui est cohérent avec les hypothèses d'application de la loi de Laplace.

Pour $k \rightarrow \infty$, on a identifié une transformation isochore. On trouve dans ce cas

$$Q = C_V \Delta T \quad \text{d'où} \quad \Delta U = C_V \Delta T$$

ce qui est bien la relation connue pour un gaz parfait.

Exercice 8 : Détente de Joule Gay-Lussac



► Autre équation d'état.

Schéma de principe de la transformation figure 2.

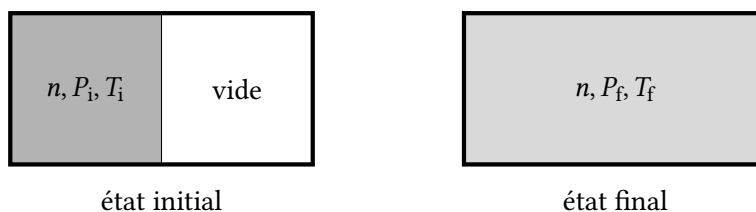


Figure 2 – Schéma de principe de la détente de Joule Gay-Lussac.

1 Considérons comme système le gaz contenu dans l'enceinte. Au cours de la détente, il ne reçoit pas de transfert thermique car l'enceinte est calorifugée. Il ne reçoit pas non plus de travail : comme la détente a lieu dans le vide il n'y a pas de force de pression exercée par l'extérieur sur le système. Je rappelle que les forces de pression intérieures ne sont pas à prendre en compte, le premier principe ne fait intervenir que les échanges d'énergie avec l'extérieur. Ainsi, d'après le premier principe,

$$\Delta U = 0.$$

$\uparrow$
1er P

2 Comme le gaz est parfait,

$$\Delta U = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{GP}}}{C_V} \Delta T \quad \text{donc} \quad \Delta T = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad T_f = T_i.$$

3 • Valeur de q : L'énergie interne est extensive, donc $n^q a^2 / V$ doit être extensif également. V et n étant extensifs

au contraire de a , le rapport n^q/V ne peut être extensif que si $q = 2$.

• **Volume exclu** : Le volume exclu b est simple à interpréter : il traduit qualitativement l'effet du volume occupé par les atomes du gaz, qui n'est donc pas accessible à leur mouvement.

• **Terme de cohésion** : Le terme de cohésion traduit l'existence de forces de van der Waals attractives entre les atomes d'argon. Ces forces attractives ont pour effet une diminution de la pression au sein du gaz, ce que traduit bien l'équation d'état :

$$P_{GP} = P_{vdW} + \frac{an^2}{V^2} \quad \text{donc} \quad P_{vdW} = P_{GP} - \frac{an^2}{V^2} < P_{GP}.$$

• Le coefficient C_{Vm} est la **capacité thermique molaire à volume constant** du gaz de van der Waals,

$$\left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_{n,V} = nC_{Vm}.$$

4 Au cours de la détente,

$$\Delta U \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{VdW}}}{=} nC_{Vm}(T_f - T_i) - an^2 \left(\frac{1}{V_f} - \frac{1}{V_i} \right) = nC_{Vm} \Delta T + \frac{an^2}{2V_0}$$

donc

$$a = -\frac{2C_{Vm} \Delta T V_0}{n} = 0,13 \text{ J} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-2}$$

Transitoires thermiques

Exercice 9 : Glacière thermoélectrique

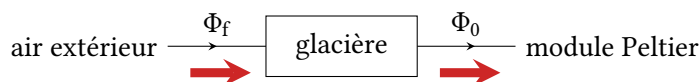


- Transitoire thermique ;
- Résistance thermique.

1 L'énoncé indique que le module Peltier *prélève* le flux $\Phi_0 > 0$ à l'intérieur de la glacière, ce qui renseigne sur son algébrisation et son signe. En outre, il reçoit un flux de fuites $\Phi_f > 0$ de la part de l'extérieur de la glacière, décrit par la loi d'Ohm thermique

$$\Phi_f = \frac{1}{R}(T_0 - T).$$

Le diagramme des échanges est le suivant, les fines flèches noires donnant le sens d'algébrisation et les flèches rouges le sens réel.



2 Procédons à un bilan d'enthalpie pour le contenu de la glacière en régime permanent. Raisonnons sur une durée infinitésimale dt :

$$dH \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} \Phi_f dt - \Phi_0 dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RP}}}{=} 0$$

d'où on déduit en remplaçant

$$\frac{1}{R}(T_0 - T_{lim}) - \Phi_0 = 0 \quad \text{soit} \quad T_{lim} = T_0 - R\Phi_0.$$

3 Le raisonnement est identique, si ce n'est que l'enthalpie varie. D'après la loi de Joule, on a

$$dH \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} \frac{1}{R}(T_0 - T) dt - \Phi_0 dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Joule}}}{=} mc dT,$$

et en divisant de part et d'autre par dt il vient

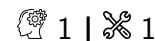
$$mc \frac{dT}{dt} = \frac{1}{R}(T_0 - T) - \Phi_0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{1}{mcR}T = \frac{1}{mcR}T_0 - \frac{\Phi_0}{mc}}.$$

On identifie alors le temps caractéristique

$$\boxed{\tau = mcR}$$

qui indique l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.

Exercice 10 : Chauffage isobare d'un gaz parfait



- ▷ Transitoire thermique ;
- ▷ Enthalpie.

1 Le système est constitué du gaz et de la résistance. Appliquons le premier principe au gaz entre les instants t et $t + dt$. La transformation est isobare avec $p = p_0$ (p pression du gaz) grâce au piston libre de coulisser, ce qui permet de travailler en enthalpie. Le système ne reçoit que le travail électrique $\delta W_e = RI^2 dt$ fourni par le générateur qui alimente la résistance. Le bilan d'enthalpie s'écrit

$$dH \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{=} RI^2 dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{GP}}}{=} C_P dT.$$

d'où on déduit

$$\frac{dT}{dt} = \frac{RI^2}{C_P}$$

et en utilisant l'expression de $R(T)$ on obtient l'équation différentielle

$$\frac{dT}{dt} = \frac{R_0 I^2}{C_P T_0} T = \frac{T}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{C_P T_0}{R_0 I^2}.$$

Cette équation s'intègre en

$$T(t) = A e^{+t/\tau},$$

et à l'instant initial

$$T(0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} T_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{=} A$$

d'où on déduit finalement

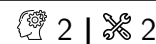
$$\boxed{T(t) = T_0 e^{+t/\tau}}.$$

Si on écrit l'équation différentielle sous forme canonique, on constate que les deux préfacteurs sont de signe différents : le système est instable, il est donc logique de trouver une solution divergente.

2 On en déduit

$$V(t) = \frac{nRT(t)}{p_0} = \frac{nRT_0}{p_0} e^{+t/\tau} \quad \text{soit} \quad \boxed{V(t) = V_0 e^{+t/\tau}}.$$

Exercice 11 : Thermomètre à alcool



- ▷ Transitoire thermique ;
- ▷ Enthalpie.

1 Par définition,

$$\Phi = \frac{1}{R} (T_{\text{ext}} - T) .$$

2 Procédons au bilan d'enthalpie d'une transformation infinitésimale de durée dt , monobare et mécaniquement réversible.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{1er P}}}{dH} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{liquide}}}{\Phi dt} = mc \frac{dT}{dt} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{1}{Rmc} T = \frac{1}{Rmc} T_{\text{ext}} ,}$$

ce qui se résout en

$$\boxed{T(t) = T_{\text{ext}} + (T_0 - T_{\text{ext}}) e^{-t/\tau} .}$$

3 L'écart de température est $T(t) - T_{\text{ext}}$, t_1 est donc tel que

$$T(t_1) - T_{\text{ext}} = \frac{T_0 - T_{\text{ext}}}{100} \quad \text{soit} \quad e^{-t_1/\tau} = \frac{1}{100} \quad \text{d'où} \quad \boxed{t_1 = \tau \ln 100 = 100 \text{ s} .}$$

4 Le niveau d'éthanol varie seulement dans le capillaire, dont le volume total reste néanmoins négligeable devant le volume du réservoir. Ainsi,

$$\Delta V = \pi b^2 \Delta h \quad \text{et} \quad V = \frac{4}{3} \pi a^3 + \pi b^2 h \simeq \frac{4}{3} \pi a^3$$

d'où

$$\boxed{\Delta h = \frac{4}{3} \beta \frac{a^3}{b^2} \Delta T}$$

5 En inversant l'expression précédente,

$$\boxed{b = \sqrt{\frac{4}{3} \beta a^3 \frac{\Delta T}{\Delta h}} = 0,16 \text{ mm} .}$$