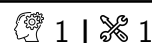


Énergie mécanique

Théorèmes sous forme intégrale

Exercice 1 : Marsupilami



► Conservation de l'énergie mécanique.

- 1 Si l'on néglige les frottements, alors l'énergie mécanique du Marsupilami

$$E_m = E_{pp} + E_{pe} + E_c$$

est une constante du mouvement. Son énergie potentielle compte une contribution de pesanteur E_{pp} et une contribution élastique E_{pe} . Prenons la position du sol comme référence des énergies potentielles. Lorsqu'il est au sol, queue comprimée, prêt à sauter, l'énergie mécanique du Marsupilami est uniquement de type potentielle élastique,

$$E_m = 0 + \frac{1}{2}k(\ell_m - \ell_0)^2 + 0$$

Il serait également raisonnable d'inclure une contribution d'énergie potentielle de pesanteur $mg\ell_m$ à l'énergie mécanique, mais cela ne modifierait pas beaucoup le résultat final.

Au contraire, lorsque le Marsupilami atteint sa hauteur de saut maximale, sa vitesse est nulle et son énergie mécanique n'est plus que de type potentielle de pesanteur,

$$E_m = mgh + 0 + 0.$$

D'après la conservation de l'énergie mécanique,

$$\frac{1}{2}k(\ell_m - \ell_0)^2 = mgh \quad \text{d'où} \quad k = \frac{2mgh}{(\ell_m - \ell_0)^2} = 4,4 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

- 2 Lorsque la queue du Marsupilami quitte le sol, sa longueur est égale à sa longueur à vide. Le Marsupilami se trouve donc à une hauteur ℓ_0 au dessus du sol avec une vitesse v . Son énergie mécanique vaut alors

$$E_m = mg\ell_0 + 0 + \frac{1}{2}mv^2.$$

D'après la conservation de l'énergie mécanique,

$$mg\ell_0 = mg\ell_0 + \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{d'où} \quad v = \sqrt{2g(h - \ell_0)} = 12,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Exercice 2 : Saut à l'élastique



► Conservation de l'énergie mécanique.

Posons un axe (Oz) vertical vers le bas, dont l'origine est prise au niveau du pont. La longueur de l'élastique s'identifie donc à la coordonnée z , mais il n'est tendu que si $z > \ell_0$: ce n'est pas un ressort, il n'exerce aucune force lorsqu'il est comprimé.

L'énergie mécanique du sauteur se conserve. En l'exprimant au point de départ ($z = 0$, élastique non tendu, vitesse nulle) et au point le plus bas de la trajectoire ($z = z_{\max}$, vitesse nulle) on obtient

$$E_m = E_c + E_{pp} + E_{pe} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{départ}}}{=} 0 + 0 + 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{plus bas}}}{=} 0 - mgz_{\max} + \frac{1}{2}k(z_{\max} - \ell_0)^2$$

Le saut d'Alice permet de déterminer la raideur de l'élastique,

$$k = \frac{2mgz_{\max}}{(z_{\max} - \ell_0)^2} = 37,6 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Déterminons maintenant la position la plus basse atteinte par Bob avec cet élastique, en résolvant l'équation

$$-mgz_{\max} + \frac{1}{2}kz_{\max}^2 - kz_{\max}\ell_0 + \frac{1}{2}k\ell_0^2 = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}kz_{\max}^2 - (mg + k\ell_0)z_{\max} + \frac{1}{2}k\ell_0^2 = 0$$

Son discriminant vaut

$$(mg + k\ell_0)^2 - k^2\ell_0^2 = (mg)^2 + 2kmgl_0 > 0$$

d'où on déduit (seule la racine positive est pertinente physiquement)

$$z_{\max} = \frac{(mg + k\ell_0) + \sqrt{(mg)^2 + 2kmgl_0}}{k} = 91 \text{ m}.$$

Bob peut donc **garder le même élastique qu'Alice** pour sauter.

Exercice 3 : Skieur



► Calcul de travaux le long d'une trajectoire ;
► Théorème de l'énergie cinétique sous forme intégrale.

Schéma figure 1. Compte tenu de l'orientation des forces, il est plus judicieux d'utiliser un repérage incliné le long de la pente.

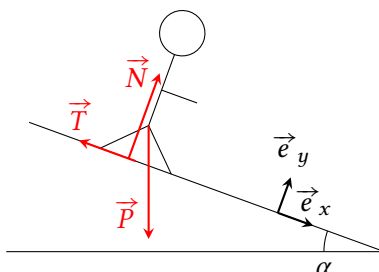


Figure 1 – Schéma du skieur en descente.

1 Notons $x = 0$ et $x = L$ les deux extrémités de la piste. Le travail du poids du skieur se calcule simplement,

$$W(\vec{P}) = \int_0^L \vec{P} \cdot d\vec{M} = \int_0^L m\vec{g} \cdot dx \vec{e}_x = mg \sin \alpha \int_0^L dx \quad \text{d'où} \quad \boxed{W(\vec{P}) = mg \sin \alpha L}$$

Comme la force de réaction normale est perpendiculaire à la pente (donc à la trajectoire), alors elle ne travaille pas, donc

$$W(\vec{N}) = 0$$

Calculons enfin le travail de la force de réaction tangentielle $\vec{T}$. La seule chose que l'on connaisse à son sujet est le lien entre sa norme et celle de N . Comme le skieur demeure sur la piste sans s'enfoncer, alors

$$P_y + N_y = 0 \quad \text{soit} \quad -mg \cos \alpha + N = 0 \quad \text{d'où} \quad T = \mu mg \cos \alpha$$

Alors,

$$W(\vec{T}) = \int_0^L \vec{T} \cdot d\vec{M} \quad \text{donc} \quad \boxed{W(\vec{T}) = -\mu mg \cos \alpha L}$$

2 Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au skieur entre son point de départ D et son point d'arrivée A ,

$$E_c(A) - E_c(D) = W(\vec{P}) + W(\vec{T}) = mgL(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

Comme la vitesse initiale du skieur est nulle, et en notant v sa vitesse d'arrivée, on en déduit

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgL(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

et finalement

$$\boxed{v = \sqrt{2gL(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} = 18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 65 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}$$

Exercice 4 : Convoyeur de colis



- Calcul de travaux le long d'une trajectoire ;
- Théorème de l'énergie cinétique sous forme intégrale.

Comme on cherche uniquement les vitesses en deux points (A et B), la version intégrale du théorème de l'énergie cinétique est la méthode à privilégier.

- **Système** : paquet de masse m ;
- **Référentiel galiléen** : terrestre ;
- **Repérage** : cartésien incliné d'origine A , voir figure 2,

$$\vec{AM} = x \vec{e}_x \quad \vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x \quad \vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x$$

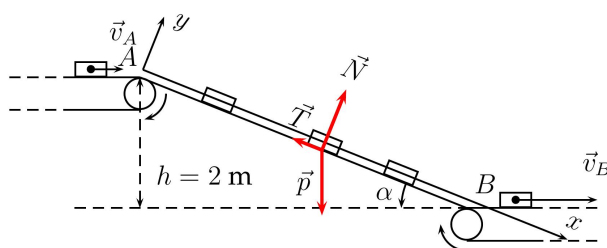


Figure 2 – Glissement d'un paquet sur le convoyeur.

- **Bilan des forces** :
 - poids $\vec{P}$: sur la trajectoire AB où le colis subit une dénivellation h , le poids et moteur et son travail vaut

$$W_{AB}(\vec{P}) = -\Delta E_{pp} = +mgh > 0$$

- composante normale $\vec{N}$ de la réaction du support, qui ne travaille pas car elle est orthogonale au déplacement

- ▷ composante tangentielle $\vec{T} = -T \vec{e}_x$, dont il faut calculer sa norme, ce qui ne peut se faire que via la norme de $\vec{N}$ et la loi de Coulomb. Appliquons pour ce faire le PFD en projection sur $\vec{e}_y$,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} \quad \text{soit} \quad 0 = N - mg \cos \alpha \quad \text{d'où} \quad T = fmg \cos \alpha$$

ce qui permet enfin de calculer le travail de $\vec{T}$,

$$W_{AB}(\vec{T}) = \int_A B \vec{T} \cdot d\vec{M} = -fmg \cos \alpha \int_{AB} dx = -fmg \cos \alpha L$$

où L est la longueur totale du plan incliné. Comme $L = h/\sin \alpha$,

$$W_{AB}(\vec{T}) = -fmg \cos \alpha \times \frac{h}{\sin \alpha} = -\frac{fmg h}{\tan \alpha}.$$

• **Théorème de l'énergie cinétique :**

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh - \frac{fmg h}{\tan \alpha}$$

ce qui donne

$$\tan \alpha = \frac{2fmg h}{-mv_B^2 + mv_A^2 + 2mgh}$$

ce qui se simplifie en

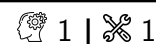
$$\tan \alpha = \frac{2fgh}{v_A^2 - v_B^2 + 2gh}$$

et conduit à

$$\tan \alpha = 0,4 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\alpha = 22^\circ}.$$

Théorèmes en version instantanée

Exercice 5 : Piégeage d'un électron



- ▷ Conservation de l'énergie mécanique ;
▷ Autre exemple d'énergie potentielle.

L'énergie mécanique est simplement la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle,

$$E_m = \frac{1}{2}m \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{e V_0}{d^2} z^2.$$

En négligeant tout phénomène dissipatif (frottement, etc.), elle se conserve, d'où

$$\frac{dE_m}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} m \frac{dz}{dt} \frac{dz}{dt^2} + \frac{e V_0}{d^2} z \frac{dz}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TEM}}}{=} 0.$$

Comme l'électron se déplace dans le piège, alors sa vitesse n'est pas constamment nulle. On en déduit l'équation du mouvement,

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{e V_0}{m d^2} z = 0.$$

L'équation différentielle que vérifie le mouvement de l'électron est donc celle d'un oscillateur harmonique, dont la fréquence propre vaut

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e V_0}{m d^2}} = 25 \cdot 10^6 \text{ Hz} = 25 \text{ MHz}}$$

Exercice 6 : Deux ressorts sur un plan incliné



► Conservation de l'énergie mécanique.

- **Système** : masse m ;
- **Référentiel galiléen** : terrestre ;
- **Repérage** : unidimensionnel cartésien le long de l'axe (Ox) ;
- **Bilan des actions mécaniques** : s'agissant du TD sur l'énergie mécanique, on choisit une approche énergétique ... même si ici on ne gagne pas grand chose par rapport au PFD.
- poids, qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur

$$E_{pp} = mgx \sin \varphi$$

- force de rappel exercée par le premier ressort (fixé en O), qui dérive de l'énergie potentielle élastique

$$E_{pe1} = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2$$

- force de rappel exercée par le deuxième ressort, qui dérive de l'énergie potentielle élastique

$$E_{pe2} = \frac{1}{2}k((2\ell_0 - x) - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}k(\ell_0 - x)^2 = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2$$

- force de réaction du support, normale au support puisque les frottements sont négligés et qui ne travaille donc pas.

- **Théorème de l'énergie mécanique** : l'énergie mécanique de la masse s'écrit

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx \sin \varphi + 2 \times \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 .$$

Comme elle n'est soumise qu'à des forces conservatives ou qui ne travaillent pas,

$$\frac{dE_m}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TEM}}}{=} 0 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{m\dot{x}\ddot{x} + mg\dot{x} \sin \varphi + k \times 2\dot{x}(x - \ell_0)} .$$

— Rappelons que la dérivée de la fonction $x \mapsto u(x)^2$ est $2uu'$.

Puisque la masse part d'une position quelconque, sa vitesse n'est pas constamment nulle, ce qui permet de simplifier l'égalité ci-dessus par $\dot{x}$ pour aboutir à l'équation du mouvement :

$$m\ddot{x} + mg \sin \varphi + 2k(x - \ell_0) = 0 \quad \text{soit} \quad \ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 2\frac{k\ell_0}{m} - g \sin \varphi .$$

- **Résolution de l'équation différentielle** : posons $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$. Les solutions homogènes s'écrivent

$$x_H(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

et une solution particulière est $x_P = \text{cte}$ tel que

$$0 + \omega_0^2 x_P = \omega_0^2 \ell_0 - g \sin \varphi \quad \text{soit} \quad x_P = \ell_0 - \frac{g}{\omega_0^2} \sin \varphi ,$$

donc finalement

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \ell_0 - \frac{g}{\omega_0^2} \sin \varphi .$$

À l'instant initial, on a d'une part

$$x(t=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} \ell_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} A + \ell_0 - \frac{g}{\omega_0^2} \quad \text{d'où} \quad A = \frac{g}{\omega_0^2},$$

et d'autre part

$$\dot{x}(t=0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} -\omega_0 B \quad \text{d'où} \quad B = 0.$$

Finalement,

$$x(t) = \frac{g}{\omega_0^2} \cos(\omega_0 t) + \ell_0 - \frac{g}{\omega_0^2} \sin \varphi.$$

Exercice 7 : Mouvement dans un cercle



- ▷ Conservation de l'énergie mécanique ;
- ▷ Décollage d'un support.

Le système étudié est la bille, modélisée par un point matériel M de masse m , en évolution dans le référentiel terrestre, galiléen.

1 Le point M est soumis à son poids, qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur, et à la réaction du support, qui ne travaille pas : puisqu'il n'y a pas de frottement, seule la composante normale est à prendre en compte. L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit

$$E_{pp} = mgz_M + \text{cte} = -mgR \cos \theta + \text{cte}$$

en introduisant de façon très temporaire un axe z vertical ascendant d'origine O . Choisissons dès maintenant la constante en prenant $E_{pp} = 0$ en bas du cercle, c'est-à-dire lorsque $\theta = 0$, ce qui donne

$$E_{pp} = -mgR \cos \theta + mgR = mgR(1 - \cos \theta)$$

De plus, comme le mouvement est circulaire, on connaît la vitesse de M d'où on déduit son énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2$$

L'énergie mécanique de la bille est alors une constante du mouvement, qui vaut

$$E_m = -mgR(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2$$

Ainsi,

$$\frac{dE_m}{dt} = mgR \dot{\theta} \sin \theta + mR^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = 0$$

Comme $\dot{\theta}$ ne peut pas être constamment nul (cela signifierait que la vitesse est toujours nulle, or on sait qu'à $t = 0$ la vitesse de la bille n'est pas nulle), on peut simplifier pour obtenir

$$mR^2 \ddot{\theta} + mgR \sin \theta = 0 \quad \text{d'où} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0$$

On reconnaît l'équation d'un pendule simple.

2 Le meilleur moyen de déterminer une force inconnue est d'écrire le principe fondamental de la dynamique,

$$m \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{N}$$

On utilise ici évidemment le repérage polaire de centre O avec $r = R$ constant, d'où

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -N + mg \cos \theta \\ mR\ddot{\theta} = mg \sin \theta \end{cases}$$

car $\vec{N}$ est orientée selon $-\vec{u}_r$. L'équation projetée sur $\vec{u}_\theta$ donne l'équation du mouvement, déterminée énergétiquement, alors que l'équation projetée sur $\vec{u}_r$ donne accès à la norme N ,

$$N = mR\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta.$$

Or on a montré précédemment que

$$E_m = mgR(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 \quad \text{d'où} \quad mR\dot{\theta}^2 = \frac{2}{R}E_m + 2mg(\cos \theta - 1)$$

Ainsi,

$$N = 2RE_m + mg(3 \cos \theta - 2).$$

Enfin, comme l'énergie mécanique est une constante du mouvement, sa valeur est toujours égale à sa valeur initiale. Comme on a **déjà** choisi la référence d'énergie potentielle en bas du cercle, alors

$$E_m = E_c(0) + E_p(0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0$$

Il est absolument indispensable de garder la même référence d'énergie potentielle tout au long de l'exercice. En effet, E_m est définie à une constante additive près, ce qui n'est pas le cas de la force. Changer malencontreusement de constante en cours de route ferait apparaître la différence entre les constantes dans l'expression de la force, ce qui n'a aucun sens.

Cette expression donne finalement le résultat escompté,

$$N = m \left[\frac{v_0^2}{R} + g(3 \cos \theta - 2) \right]$$

3 La norme N doit par définition rester positive tout au long du mouvement : si elle s'annule, c'est que le contact entre le support et la bille est rompu. Le premier terme entre crochets est toujours positif. En revanche, le second terme peut prendre des valeurs négatives. La valeur la plus petite qu'il puisse atteindre, lorsque $\cos \theta = -1$, est $-5g$. Ainsi, la bille ne décolle pas du support si

$$\frac{v_0^2}{R} - 5g > 0 \quad \text{soit} \quad v_0 > v_{\min} = \sqrt{5gR}$$

4 Supposons $v_0 < v_{\min}$, et cherchons l'angle θ pour lequel la norme de N s'annule,

$$\frac{v_0^2}{R} + g(3 \cos \theta - 2) = 0$$

$$3g \cos \theta = 2g - \frac{v_0^2}{R}$$

$$\cos \theta = \frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3gR}$$

$$\theta = \arccos \left(\frac{2}{3} - \frac{v_0^2}{3gR} \right)$$

Exercice 8 : Balle de golf dans un looping

oral banque PT |  2 |  2 | 



- Conservation de l'énergie mécanique ;
- Décollement d'un support ;
- Chute libre.

On choisit l'origine du repère au centre du demi-cylindre, et θ compté à partir de l'horizontale, la balle entre donc dans le looping en $\theta = -\pi/2$.

Un autre choix entraîne des expressions différentes en fonction de θ , en revanche les inégalités à établir sur les vitesses sont indépendantes du repérage choisi.

1 Conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m = \underset{\text{init}}{\frac{1}{2}mv_0^2} - mgR = \underset{\text{cylindre}}{\frac{1}{2}mv^2} + mgR \sin \theta \quad \text{d'où} \quad \boxed{v^2 = v_0^2 - 2gR(1 + \sin \theta)}.$$

2 Il ne faut pas que la vitesse s'annule, donc

$$v_0 > 2\sqrt{gR}.$$

3 Accélération dans un mouvement circulaire :

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

Projection du poids :

$$\vec{P} = mg(-\sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_\theta)$$

Projection du PFD sur $\vec{e}_r$:

$$-mR\dot{\theta}^2 = -mg \sin \theta - N.$$

Or avec la conservation de l'énergie (cf. 1ère question) :

$$R\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R} - 2g(1 + \sin \theta)$$

ce qui donne

$$-\frac{mv_0^2}{R} + 2mg(1 + \sin \theta) = -mg \sin \theta - N$$

et enfin

$$N = \frac{mv_0^2}{R} - mg(2 + 3 \sin \theta)$$

4 $N > 0$ partout donc $v_0^2 > 5gR$

5 Conservation de l'énergie :

$$E_m = \underset{\text{init}}{\frac{1}{2}mv_0^2} - mgR = \underset{\text{sortie}}{\frac{1}{2}mv^2} + mgR \quad \text{d'où} \quad \boxed{v_s^2 = v_0^2 - 4gR}.$$

6 Chute libre :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \dot{x} = -v_s \\ \dot{z} = -gt \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x = -v_s t \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + R \end{cases}$$

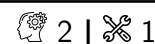
On en déduit l'équation de la trajectoire :

$$z(x) = R - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 - 4gR}.$$

On cherche alors x tel que

$$z(x) = -R \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 - 4gR} = 2R \quad \text{d'où} \quad x = -\sqrt{\frac{4R(v_0^2 - 4gR)}{g}}$$

Exercice 9 : Méthode de l'intégrale première



► Énergies potentielles.

1 • **Système** : masse ;

• **Référentiel galiléen** : terrestre ;

• **Repérage** : $\overrightarrow{OM} = z \vec{e}_z \implies \vec{v} = \dot{z} \vec{e}_z \implies \vec{a} = \ddot{z} \vec{e}_z$.

• **Bilan des forces** :

► poids $\vec{P} = -mg \vec{e}_z$;

► force de rappel élastique $\vec{F}_r = -k(z - \ell_0) \vec{e}_z$.

• **PFD** : en projection sur l'axe (Oz),

$$m\ddot{z} = -mg - k(z - \ell_0)$$

On pourrait mettre cette équation sous forme canonique, mais c'est contre-productif pour la suite de l'exercice : on s'arrête donc ici.

2 L'équation multipliée par $\dot{z}$ s'écrit

$$m\dot{z}\ddot{z} = -mg\dot{z} - k\dot{z}(z - \ell_0).$$

En identifiant tous les termes de type $u\dot{u}$ à la dérivée d'une fonction $u^2/2$, on a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{z}^2 \right) = \frac{d}{dt} (-mgz) - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k (z - \ell_0)^2 \right)$$

ce qui se réécrit

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{z}^2 + mgz + \frac{1}{2} k (z - \ell_0)^2 \right) = 0.$$

On reconnaît bien sûr l'**énergie mécanique**, dont on montre ainsi qu'elle est conservée.

3 La démarche suivie en multipliant le PFD par la vitesse consiste ni plus ni moins à établir le théorème de l'énergie cinétique dans le cas particulier de la situation de l'exercice. Il n'est donc pas étonnant de voir apparaître la conservation de l'énergie mécanique, qui est une conséquence directe du TEC.

Remarquons également que c'est une démarche analogue qui permet de procéder aux bilans d'énergie dans les circuits électriques.

Exercice 10 : Remonte-pente

oral CCINP PSI | 3 | 3



► Problème ouvert.

La puissance du moteur doit être telle qu'elle puisse entraîner tous les skieurs. L'approche probablement la plus simple consiste donc à commencer par déterminer la puissance motrice nécessaire pour tirer un skieur de masse m à une vitesse constante égale à la vitesse du câble, $v = 5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Étudions le skieur dans le référentiel terrestre, considéré galiléen. Il est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction de la piste $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$ et à la force de traction $\vec{T}$ du câble auquel il s'attache. Ces forces sont représentées figure 3.

Calculons leur puissance.

► Par définition, on note $\mathcal{P}_1 = T v \cos \beta$ la puissance exercée par le câble sur le skieur.

► Puissance développée par le poids :

$$\mathcal{P}(\vec{P}) = m \vec{g} \cdot \vec{v} = -mgv \sin(\alpha)$$

► Puissance développée par la réaction normale : $\mathcal{P}(\vec{R}_N) = 0$ car elle est orthogonale à $\vec{v}$.

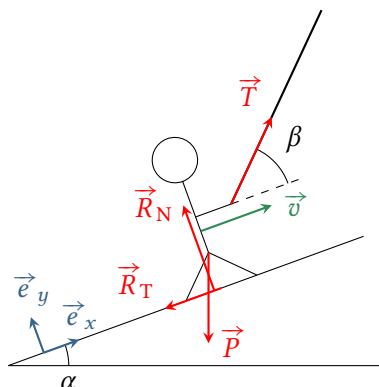


Figure 3 – Skieur entraîné par une remontée mécanique.

- Puissance développée par la réaction tangentielle : on ne peut que dire que $\mathcal{P}(\vec{R}_T) = -R_T v$ mais c'est ensuite plus compliqué car $\vec{R}_T$ est a priori inconnue.

Il nous faut donc déterminer $\vec{R}_T$. Comme le mouvement du skieur est par hypothèse rectiligne uniforme, alors par application de la loi de la quantité de mouvement,

$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T + \vec{T} = \vec{0}.$$

En la projetant sur l'axe y incliné, on en déduit

$$-mg \cos \alpha + R_N + 0 + T \sin \beta = 0 \quad \text{soit} \quad R_N = mg \cos \alpha - T \sin \beta.$$

D'après la loi de Coulomb du frottement,

$$R_T = f R_N = f mg \cos \alpha - f \frac{\mathcal{P}_1}{v \cos \beta} \sin \beta$$

d'où on déduit la puissance développée par la force tangentielle,

$$\mathcal{P}(\vec{R}_T) = -f mg v \cos \alpha - f \mathcal{P}_1 \tan \beta.$$

Comme le mouvement du skieur se fait à vitesse constante, alors la somme des puissances qu'il reçoit est nulle d'après le théorème de l'énergie cinétique. On en déduit

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}(\vec{P}) + \mathcal{P}(\vec{R}_N) + \mathcal{P}(\vec{R}_T) = 0$$

soit en remplaçant les puissances par leurs expressions

$$\mathcal{P}_1 - mg v \sin \alpha + 0 - f mg v \cos \alpha - f \mathcal{P}_1 \tan \beta = 0 \quad \text{soit} \quad \mathcal{P}_1 (1 - f \tan \beta) - mg v (\sin \alpha + f \cos \alpha) = 0.$$

On en déduit alors

$$\mathcal{P}_1 = \frac{mg v (\sin \alpha + f \cos \alpha)}{1 - f \tan \beta}$$

Estimons numériquement sa valeur, et pour cela commençons par estimer les différents angles. L'angle α se trouve grâce au dénivelé h et à la longueur totale L du câble, qui fait un aller-retour. On a donc

$$\sin \alpha = \frac{h}{L/2} = 0,05$$

Compte tenu de la valeur numérique, on a clairement $\alpha \ll 1$ et on peut faire l'approximation $\cos \alpha \simeq 1$. Comme $\cos \alpha$ est en plus multiplié par f et qu'on ne cherche qu'un ordre de grandeur, cette approximation est tout à fait adaptée ... en faisant le calcul rigoureusement on trouve $\cos \alpha = 0,9987$. Estimer l'angle β (ou plutôt sa tangente) est beaucoup moins simple. On se contentera donc de prendre $\tan \beta \simeq 1$ (c'est-à-dire $\beta \simeq \pi/4$), ce qui est sans doute une approximation grossière mais ne change à nouveau pas grand chose au résultat. Enfin, il faut également

estimer la masse du skieur et de son équipement que l'on prendra égale par exemple à $m = 80$ kg. Numériquement, on a donc

$$\mathcal{P}_1 = \frac{80 \times 10 \times \frac{5}{3,6} \times (0,05 + 0,1)}{1 - 0,1} \simeq 2 \cdot 10^2 \text{ W}.$$

C'est peu, mais les frottements ne sont pas énormes et la pente pas si raide non plus.

Pour déterminer la puissance totale à fournir par le moteur, on peut faire l'hypothèse que les frottements internes aux mécanismes sont négligeables, si bien que toute la puissance fournie par le moteur sert à tracter les skieurs. Il y a un skieur tous les cinq mètres sur une distance totale de 100 mètres : on en déduit qu'il y a 20 skieurs à la fois sur le remonte-pente. La puissance totale du moteur qui entraîne le remonte-pente est donc égale à

$$\mathcal{P} = 20 \mathcal{P}_1 \quad \text{soit} \quad \mathcal{P} = 4 \text{ kW}.$$