

Conversion électromécanique

Analyse de corrigé

Exercice 1 : Freinage inductif en rotation



- Loi de Lenz ;
- Découplage des équations électrique et mécanique ;
- Moment cinétique ;
- Bilan de puissance.

Correction des questions d'analyse du corrigé

Question d'analyse 1 - La cause première de l'induction est le mouvement des cadres, qui y fait apparaître un courant induit. Or la loi de Lenz stipule que les conséquences des phénomènes inductifs atténuent leurs causes : l'action de Laplace due à ce courant induit est donc une action de freinage.

Question d'analyse 2 - Le schéma représentant les cadres vus du dessus permet d'en déduire la direction des vecteurs normaux par la règle de la main droite : ils pointent « en haut à gauche » pour C_1 et « en bas à gauche » pour C_2 . Il ne reste plus qu'à les projeter !

Question d'analyse 3 - Simplement un générateur induit et une résistance. Attention à bien flécher le courant, sans quoi l'orientation du générateur induit ne veut rien dire.

Question d'analyse 4 - Par définition, $\vec{\mu} = ia^2 \vec{n}$. Pour le cadre 1,

$$\vec{M}_1 = i_1 a^2 (-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y) \wedge B \vec{e}_x = -i_1 a^2 B \cos \theta$$

car $\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = -\vec{e}_z$. Même chose pour le cadre 2.

Question d'analyse 5 - Le couple magnétique tend à aligner le moment magnétique sur le champ. En se plaçant dans la situation de la figure et en supposant i_1 et i_2 positifs, on doit donc avoir $M_{1z} < 0$ et $M_{2z} > 0$, ce qui est bien cohérent avec les expressions données.

Question d'analyse 6 - Les deux actions mécanique omises sont le poids, dont le moment est nul car son point d'application est sur l'axe de rotation, et l'action mécanique de la liaison pivot, implicitement supposée parfaite, sinon il y aurait un couple de frottements à ajouter.

Question d'analyse 7 - L'équation est homogène, autrement dit $\omega = 0$ est une solution particulière.

Question d'analyse 8 - Il y a deux circuits indépendants, donc deux puissances électriques mises en jeu : la conservation de la puissance à la conversion se traduit par

$$\begin{cases} \mathcal{P}_L = M_1 \omega + M_2 \omega = -i_1 a^2 B \omega \cos \theta + i_2 a^2 B \omega \sin \theta \\ e_{\text{ind},1} i_1 = a^2 B \omega \cos \theta i_1 \\ e_{\text{ind},2} i_2 = -a^2 B \omega \sin \theta i_2 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \boxed{\mathcal{P}_L + e_{\text{ind},1} i_1 + e_{\text{ind},2} i_2 = 0.}$$

Systèmes en translation

Exercice 2 : Treuil électromécanique



- ▷ Découplage des équations électrique et mécanique ;
- ▷ Bilan de puissance.

1 Pour que la masse soit soulevée, il faut que la force de Laplace subie par la tige soit dirigée selon $-\vec{e}_x$, ce qui impose $i > 0$. La valeur minimale de E correspond au cas statique, où la norme de la force de Laplace est égale au poids de m_0 , c'est-à-dire

$$m_0 g = i_{\min} a B = \frac{E_{\min}}{R} a B \quad \text{d'où} \quad E_{\min} = \frac{R m_0 g}{a B}$$

2 D'après le TRC appliqué à la masse m_0 ,

$$m_0 \vec{a} = m_0 \vec{g} + \vec{T} \quad \text{soit} \quad \vec{T} = m_0 (\vec{a} - \vec{g}) = m_0 \left(\frac{dv_z}{dt} + g \right) \vec{e}_z \quad \text{donc} \quad T = m_0 \left(\frac{dv_z}{dt} + g \right)$$

3 • **Équation mécanique.** Appliquons le théorème de la résultante cinétique à la tige (masse m). Le mouvement est horizontal, donc le poids de la tige est compensé par la force de réaction normale exercée par les rails. Ainsi,

$$m \frac{dv}{dt} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_L + \vec{T} \quad \text{soit} \quad m \frac{dv_x}{dt} = -iaB + m_0 \left(\frac{dv_z}{dt} + g \right).$$

Compte tenu du repère choisi, $v_x = -v_z$ (la masse descend si la tige se déplace vers la droite), donc

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= -iaB + m_0 \left(g - \frac{dv_x}{dt} \right) \\ (m + m_0) \frac{dv_x}{dt} &= -iaB + m_0 g. \end{aligned}$$

• **Équation électrique.** Raisonnons sur le circuit équivalent, qui contient le générateur E , une résistance R et un générateur induit de fém e dû à l'induction. La surface du circuit vaut $S = ax$ donc

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot (-dS \vec{e}_z) = -axB \quad \text{d'où} \quad e = -\frac{d\phi}{dt} = +av_x B.$$

Par la loi des mailles,

$$E + av_x B = Ri$$

4 Commençons par la vitesse v_x de la tige mobile. En isolant l'expression de i dans l'équation électrique pour l'insérer dans l'équation mécanique,

$$(m + m_0) \frac{dv_x}{dt} = -aB \left(\frac{E + av_x B}{R} \right) + m_0 g \quad \text{soit} \quad \frac{dv_x}{dt} + \frac{(aB)^2}{R(m + m_0)} v_x = -\frac{aBE}{R(m + m_0)} + \frac{m_0}{m + m_0} g$$

On pose $\tau = R(m + m_0)/(aB)^2$, et on en déduit

$$v_x(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{m_0 g R}{(aB)^2} - \frac{E}{aB}.$$

Vue la géométrie, la vitesse de la masse v_z est de même norme mais de signe opposé par rapport à v_x , donc

$$v_z(t) = -A e^{-t/\tau} - \frac{m_0 g R}{(aB)^2} + \frac{E}{aB}$$

En régime asymptotique on identifie la vitesse limite de levage,

$$V_0 = -\frac{m_0 g R}{(aB)^2} + \frac{E}{aB}.$$

et on écrit la solution sous la forme

$$v_z(t) = V_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

5 En régime permanent à vitesse de la masse V_0 (et donc courant dans le circuit I_0 mais vitesse $v_x = -V_0$), les équations électrique et mécanique deviennent respectivement

$$E = +aV_0B + RI_0 \quad \text{et} \quad 0 = -I_0aB + m_0g$$

En multipliant comme d'habitude par I_0 et V_0 ,

$$EI_0 = +aI_0V_0B + RI_0^2 \quad \text{et} \quad 0 = -I_0aBV_0 + m_0gV_0$$

et en sommant ces deux équations

$$EI_0 = RI_0^2 + m_0gV_0.$$

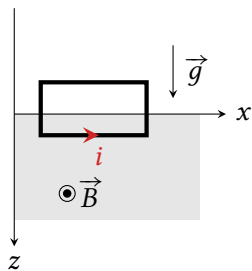
Interprétation :

- ▷ EI_0 : puissance fournie par le générateur ;
- ▷ RI_0^2 : puissance dissipée par effet Joule ;
- ▷ m_0gV_0 : variation d'énergie potentielle de la masse m_0 .

Exercice 3 : Freinage inductif en translation



▷ Découplage des équations électrique et mécanique.



1 Lorsqu'elle pénètre dans la zone de champ magnétique, la cabine est soumise à son poids qui est vertical selon $\vec{e}_z$. En outre, comme le flux magnétique au travers de la spire varie, un courant induit apparaît dans la spire, responsable d'une force de Laplace. Sans préjuger du signe réel du courant induit, orientons la spire de telle sorte que la normale orientée soit dans le même sens que $\vec{B}$, ce qui oriente nécessairement le courant dans le sens représenté ci-contre. Sur les deux parties verticales plongées dans la zone de champ, le courant est le même mais circule dans des sens différents, donc les forces de Laplace sont opposées. En revanche, seul un des deux côtés horizontaux voit le champ magnétique et subit une force de Laplace

$$\vec{F}_L = iaB\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = iaB\vec{e}_z.$$

Finalement, la vitesse initiale et toutes les forces subies par la cabine d'ascenseur sont dirigées selon $\vec{e}_z$. On en déduit que **le mouvement de la cabine reste une translation le long de cet axe.**

2 • **Équation mécanique** : D'après le théorème de la résultante appliquée à la cabine dans le référentiel terrestre galiléen, tant que la spire est à cheval entre la zone avec et la zone sans champ, on a par projection sur l'axe z

$$m \frac{dv}{dt} = +mg + iaB.$$

• **Équation électrique** : Du point de vue électrique, il faut prendre en compte la résistance R de la spire et la force électromotrice induite. Calculons cette f.é.m. La surface de circuit plongée dans le champ magnétique est égale à $S(t) = az$ tant que la spire est à cheval entre la zone avec et la zone sans champ. Ainsi, le flux magnétique vaut

$$\phi(t) = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = +azB,$$

et d'après la loi de Faraday,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -aBv.$$

La loi des mailles appliquée dans le circuit équivalent donne

$$e = Ri \quad \text{soit} \quad \boxed{-aBv = Ri}.$$

• **Découplage des équations** : on dispose de deux équations, mais l'intensité du courant dans la spire est inconnue. D'après l'équation électrique,

$$i = -\frac{aB}{R}v,$$

ce qui donne en injectant dans l'équation mécanique

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{(aB)^2}{R}v$$

ou encore

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = g \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{Rm}{(aB)^2}.$$

3 La forme générale des solutions est

$$v(t) = Ae^{-t/\tau} + g\tau,$$

avec

$$v(0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} v_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} A + g\tau \quad \text{d'où} \quad A = v_0 - g\tau.$$

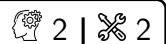
Finalement,

$$\boxed{v(t) = (v_0 - g\tau)e^{-t/\tau} + g\tau}.$$

L'équation et donc évidemment sa solution ne sont valables que lorsque la spire est à cheval entre la zone avec et la zone sans champ. Lorsque $z \geq b$, la boucle conductrice est intégralement dans la zone de champ magnétique si bien le flux au travers de la spire ne varie plus et le phénomène d'induction cesse. **La cabine retrouve alors un mouvement de chute libre**, et est de nouveau accélérée.

4 Si la cabine se trouvait complètement arrêtée, alors le flux magnétique ne varierait plus et le phénomène d'induction cesserait. La force de Laplace s'annulerait alors ... mais pas le poids de la cabine ! La cabine se retrouverait donc soumise à une seule force verticale vers le bas, et serait donc à nouveau accélérée puisqu'il n'y a rien pour la retenir. On en déduit qu'un freinage magnétique ne permet pas d'arrêter complètement la cabine d'ascenseur.

Exercice 4 : Haut-parleur



- Conservation de la puissance ;
- Approche fréquentielle.

1 Raisonnons sur le tronçon de spire représenté figure 1. L'orientation de i est celle donnée par l'énoncé. La force élémentaire qu'elle subit s'écrit

$$d\vec{F}_L = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i(d\ell \vec{e}_\theta) \wedge (B\vec{e}_r) \quad \text{soit} \quad \boxed{d\vec{F}_L = -iBd\ell \vec{e}_z}.$$

Par intégration sur tout le long de la bobine, on en déduit

$$\vec{F}_L = \int_{\text{bobine}} -iBd\ell \vec{e}_z \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{F}_L = -iB\ell_{\text{bob}} \vec{e}_z},$$

avec ℓ_{bob} la longueur totale du fil bobiné.

2

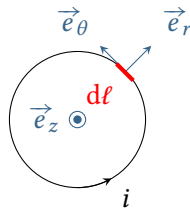


Figure 1 – Une spire du haut-parleur vue de face.

- Système : équipage mobile ;
- Référentiel : terrestre $\mathcal{R}$, supposé galiléen ;
- Bilan des forces :
 - le poids est nécessairement compensé par une force de réaction car le mouvement est horizontal ;
 - force de Laplace $\vec{F}_L = -iB\ell_{\text{bob}} \vec{e}_z$;
 - force de rappel du ressort $\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_{\text{sortant}} = -kz \vec{e}_z$;
 - force de frottement linéaire, qui modélise l'émission du son $\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$.
- D'après le théorème de la résultante cinétique,

$$m \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{F}_L + \vec{F}_r + \vec{F}_f,$$

et en remplaçant et en projetant sur $\vec{e}_z$,

$$m \frac{dv_z}{dt} = -iB\ell_{\text{bob}} - kz - \alpha v_z.$$

- 3 La puissance de la force de Laplace s'écrit

$$\mathcal{P}_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = -iB\ell_{\text{bob}}v_z.$$

On en déduit la fém induite,

$$e_{\text{ind}} = -\frac{\mathcal{P}_L}{i} \quad \text{soit} \quad e_{\text{ind}} = B\ell_{\text{bob}}v_z.$$

- 4 Le schéma électrique équivalent est représenté figure 2. D'après la loi des mailles,

$$u + e_{\text{ind}} = Ri + L \frac{di}{dt} \quad \text{soit} \quad u + B\ell_{\text{bob}}v_z = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

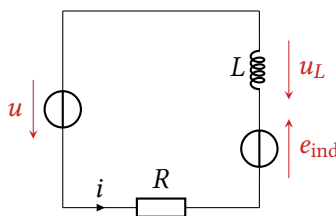


Figure 2 – Schéma électrique équivalent du haut-parleur.

- 5 D'après l'équation électrique,

$$\underline{V}_z = \frac{1}{B\ell_{\text{bob}}} (R + jL\omega) \underline{I} - \frac{1}{B\ell_{\text{bob}}} \underline{U}.$$

On remplace dans l'équation mécanique multipliée par $j\omega$ au préalable,

$$(-m\omega^2 + j\omega\alpha + k) \frac{1}{B\ell_{\text{bob}}} [(R + jL\omega) \underline{I} - \underline{U}] = -j\omega\ell_{\text{bob}}B\underline{I}$$

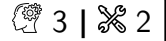
On regroupe alors les termes

$$(-m\omega^2 + j\omega\alpha + k)\underline{U} = [(m\omega^2 - j\omega\alpha - k)(R + jL\omega) - j\omega(\ell_{\text{bob}}B)^2] \underline{I},$$

ce qui conduit à

$$\underline{Z} = \underbrace{\frac{-j\omega(\ell_{\text{bob}}B)^2}{m\omega^2 - j\omega\alpha - k}}_{=Z_m} + \underbrace{(R + jL\omega)}_{=Z_e}.$$

Exercice 5 : Rails de Laplace couplés



- Rails de Laplace ;
- Bilan énergétique.

Utilisons les notations de la figure 3, et notons x_1 et x_2 les abscisses des deux barreaux, et v_1 et v_2 leurs vitesses algébriques.

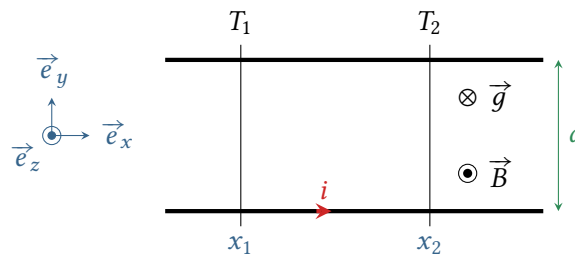


Figure 3 – Rails de Laplace couplés.

1 • Équation électrique : la surface du circuit est $a(x_2 - x_1)$ et le champ est uniforme, donc le flux magnétique vaut

$$\phi = a(x_2 - x_1) B$$

d'où on déduit la f.é.m. induite,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -a(v_2 - v_1)B.$$

Le circuit équivalent contient deux résistances R montées en série, équivalentes à une unique résistance $2R$, et le générateur induit. La loi d'Ohm donne alors

$$e = 2Ri \quad \text{soit} \quad -a(v_2 - v_1)B = 2Ri.$$

• Équations mécaniques : les deux équations mécaniques s'obtiennent par application du théorème de la résultante cinétique aux deux tiges, en mouvement par rapport au référentiel du laboratoire, que l'on suppose galiléen. Ces tiges sont soumises à leur poids et à une force de réaction qui se compensent ainsi qu'à la force de Laplace. En orientant l'intensité comme sur la figure 3, la force de Laplace s'écrit

$$\vec{F}_1 = i(-a\vec{e}_y) \wedge (B\vec{e}_z) = -iaB\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{F}_2 = i(+a\vec{e}_y) \wedge (B\vec{e}_z) = iaB\vec{e}_x$$

Le TRC projeté sur $\vec{e}_x$ donne alors

$$m\frac{dv_1}{dt} = -iaB \quad \text{et} \quad m\frac{dv_2}{dt} = +iaB.$$

• Bilan : en combinant avec l'équation électrique,

$$\begin{cases} m\frac{dv_1}{dt} = \frac{(aB)^2}{2R}(v_2 - v_1) \\ m\frac{dv_2}{dt} = -\frac{(aB)^2}{2R}(v_2 - v_1) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{2\tau}(v_2 - v_1) \\ \frac{dv_2}{dt} = -\frac{1}{2\tau}(v_2 - v_1) \end{cases}$$

2 Sans indication, la question est un peu ardue ... Il faut découpler ces équations couplées en prenant la somme et la différence.

- **Différence** : posons $\delta = v_2 - v_1$. Des équations précédentes, on déduit

$$\frac{d\delta}{dt} + \frac{1}{\tau}\delta = 0$$

qui s'intègre en

$$\delta(t) = A e^{-t/\tau}.$$

À l'instant initial,

$$\delta(0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol}}}{=} A \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} v_2(0) - v_1(0) = -v_0$$

si bien que

$$\delta(t) = -v_0 e^{-t/\tau}.$$

- **Somme** : posons maintenant $\sigma = v_1 + v_2$. À partir du système d'équations couplées, il vient

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad \text{d'où} \quad \sigma = \text{cte}.$$

La constante se détermine à l'instant initial,

$$\sigma = v_1(0) + v_2(0) = v_0.$$

- **Retour aux vitesses des barreaux** : en inversant,

$$v_1(t) = \frac{\sigma - \delta}{2} \quad \text{et} \quad v_2(t) = \frac{\sigma + \delta}{2}$$

soit

$$v_1(t) = \frac{v_0}{2} \left(1 + e^{-t/\tau}\right) \quad \text{et} \quad v_2(t) = \frac{v_0}{2} \left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

3 Si la vitesse de la tige T_1 est imposée, c'est qu'elle est soumise à une force supplémentaire qui permet de la contrôler. Le TRC appliqué à T_1 est donc modifié par rapport aux questions précédentes. Raisonnons donc sur le TRC appliqué à T_2 traduit en représentation complexe,

$$j\omega \underline{v_2} = -\frac{1}{2\tau}(\underline{v_2} - \underline{v_1})$$

qui donne

$$(1 + 2j\tau\omega)\underline{v_2} = \underline{v_1}.$$

On en déduit l'amplitude,

$$|\underline{v_2}| = \frac{|\underline{v_1}|}{\sqrt{1 + 4\tau^2\omega^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{1 + 4\tau^2\omega^2}}$$

et le déphasage

$$\varphi = -\arg(1 + 2j\tau\omega) = -\arctan(2\tau\omega).$$

Ainsi,

$$v_2(t) = \frac{V_0}{\sqrt{1 + 4\tau^2\omega^2}} \cos[\omega t - \arctan(2\tau\omega)].$$

4 Les équations mécaniques s'écrivent

$$m \frac{dv_1}{dt} = -iaB \quad \text{et} \quad m \frac{dv_2}{dt} = +iaB$$

donc en les multipliant respectivement par v_1 et v_2 on obtient

$$mv_1 \frac{dv_1}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_1^2 \right) = -iaBv_1 \quad \text{et} \quad mv_2 \frac{dv_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_2^2 \right) = iaBv_2.$$

Prenons maintenant l'équation électrique, et multiplions-la par i ,

$$-a(v_2 - v_1)B = 2Ri \quad \text{soit} \quad -a(v_2 - v_1)Bi = 2Ri^2.$$

En combinant on en déduit

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_2^2 \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_1^2 \right) = 2Ri^2$$

ou encore

$$\underbrace{-\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_1^2 \right)}_{\text{énergie cinétique perdue par 1}} = \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_2^2 \right)}_{\text{énergie cinétique gagnée par 2}} + \underbrace{2Ri^2}_{\text{effet Joule}}.$$

Ainsi, l'énergie cinétique perdue par le barreau 1 est entièrement récupérée par le barreau 2 ou dissipée par effet Joule.

La méthode est générale et à retenir : pour obtenir le bilan énergétique en présence d'induction, il faut multiplier les équations électrique et mécanique par la bonne grandeur pour obtenir une puissance. Le TRC implique des forces, une puissance s'obtient en multipliant par la vitesse ; la loi des mailles implique des tensions qu'il faut multiplier par l'intensité pour obtenir une puissance. Il reste ensuite à sommer les deux équations, ce qui a le bon goût d'éliminer le terme en champ magnétique, et interpréter le résultat.

Systèmes en rotation

Exercice 6 : Roue de Barlow



- Découplage des équations électrique et mécanique ;
- Conservation de la puissance ;
- Moment cinétique.

Utilisons des coordonnées cylindriques d'axe (Oz).

1 La force de Laplace vaut

$$\vec{F}_L = \int i(-d\ell \vec{e}_r) \wedge B \vec{e}_z = iaB \vec{e}_\theta.$$

Elle s'applique au milieu de CO , son bras de levier vaut donc $a/2$ et son moment

$$\Gamma_L = i \frac{a^2 B}{2}.$$

Outre le couple de Laplace Γ_L , le disque subit le couple résistant Γ_m dû à la masse qu'il soulève. En supposant la liaison pivot parfaite, le TMC appliqué au disque donne

$$J\ddot{\theta} = i \frac{a^2 B}{2} + \Gamma_m.$$

2 Les actions de Laplace ont pour puissance

$$\mathcal{P}_L = \Gamma_L \dot{\theta} = i \frac{a^2 B}{2} \dot{\theta}.$$

La conservation de la puissance donne alors

$$e_{\text{ind}} = -\frac{\mathcal{P}_L}{i} = -\frac{a^2 B}{2} \dot{\theta}.$$

D'après la loi des mailles appliquée au circuit électrique équivalent de la figure 4,

$$U + e_{\text{ind}} = Ri \quad \text{soit} \quad i = \frac{U}{R} - \frac{a^2 B}{2R} \omega.$$

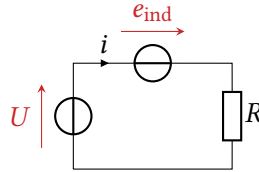


Figure 4 – Circuit électrique équivalent à la roue de Barlow.

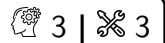
3 En régime permanent, $\omega = \dot{\theta} = \text{cte}$. En injectant l'expression de i dans l'équation mécanique, il vient

$$\frac{a^2 B}{2} \left(\frac{U}{R} - \frac{a^2 B}{2R} \omega_{\infty} \right) + \Gamma_m = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{U}{R} - \frac{a^2 B}{2R} \omega_{\infty} - \frac{2}{a^2 B} bmg = 0$$

et ainsi

$$\omega_{\infty} = \frac{2}{a^2 B} U - \frac{4R}{a^4 B^2} bmg.$$

Exercice 7 : Moteur asynchrone



- Équations électrique et mécanique ;
- Moment cinétique ;
- Approche fréquentielle.

1 Supposons la spire immobile. Du fait de la rotation du champ tournant, le flux magnétique au travers de la spire varie. Il y a donc un phénomène d'induction, qui génère un courant dans la spire. Ce courant a pour conséquence l'apparition d'un moment magnétique qui tend à s'aligner avec le champ. Comme le champ tourne, la spire tourne également. On peut donner une vision équivalente à partir de la loi de Lenz : l'effet du courant induit est de diminuer les variations de flux magnétique au travers de la spire, et donc de chercher à donner à la spire une orientation constante par rapport au champ $\vec{B}$. Comme le champ tourne, la spire tourne également.

Les deux vitesses de rotation ne peuvent pas être égales. Si tel était le cas, en se plaçant dans le référentiel de la spire, le champ magnétique serait fixe et de norme constante, et il ne pourrait donc plus y avoir d'induction. La spire ralentirait alors en raison des frottements ... ce qui impliquerait de nouveau un phénomène d'induction.

2 À l'instant t , $\vec{n}$ forme avec $\vec{e}_z$ un angle ωt et $\vec{B}$ un angle $\omega' t$. L'angle θ vaut donc

$$\theta(t) = \omega' t - \omega t = \Omega t.$$

La vitesse de glissement Ω est la vitesse angulaire à laquelle $\vec{n}$ et $\vec{B}$ se décalent l'un par rapport à l'autre.

3 • **Circuit électrique équivalent** : voir figure 5. Il n'y a pas de couplage inductif à prendre en compte. Le sens de i et de e doit être le même pour pouvoir appliquer la loi de Faraday.

• **Calcul de la fém induite** : Le flux magnétique au travers de la spire à l'instant t est égal à

$$\phi(t) = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = SB \cos \theta = SB \cos(\Omega t).$$

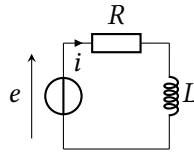


Figure 5 – Schéma électrique équivalent à la machine asynchrone.

On en déduit la f.é.m. induite par le champ extérieur par la loi de Faraday,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = SB\dot{\theta} \sin \theta \quad \text{soit} \quad e = SB\Omega \sin(\Omega t).$$

• **Équation électrique** : d'après la loi des mailles,

$$e = Ri + L \frac{di}{dt} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{SB}{L}\Omega \sin(\Omega t)}.$$

4 L'équation différentielle décrit un circuit en forçage harmonique de pulsation Ω . La pulsation du courant dans la bobine en régime permanent est donc Ω .

Passer l'équation différentielle en représentation complexe pose une difficulté à cause du terme de droite. En représentation complexe $\cos \Omega t \mapsto e^{j\Omega t}$, donc

$$\sin \Omega t = \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) \mapsto e^{j(\Omega t - \pi/2)} = -j e^{j\Omega t}.$$

Plus astucieux, on peut aussi noter que ce terme de droite s'écrit

$$\frac{E_{ind}}{L} = -\frac{j\Omega}{L}\Phi = \frac{j\Omega SB}{L}$$

L'équation différentielle devient

$$j\Omega \underline{I} e^{j\Omega t} + \frac{R}{L} \underline{I} e^{j\Omega t} = -j\Omega \frac{SB}{L} e^{j\Omega t}$$

ce qui donne

$$\frac{jL\Omega + R}{L} \underline{I} = -j\Omega \frac{SB}{L}$$

soit

$$\underline{I} = -\frac{j\Omega SB}{R + jL\Omega} = \frac{-j\Omega SB (R - jL\Omega)}{R^2 + L^2\Omega^2} = -\frac{\Omega SB}{R^2 + L^2\Omega^2} (jR + L\Omega)$$

et enfin

$$\underline{I} e^{j\Omega t} = -\frac{\Omega SB}{R^2 + L^2\Omega^2} (L\Omega - jR) (\cos \Omega t + j \sin \Omega t).$$

On peut alors en déduire $i(t) = \text{Re} [\underline{I} e^{j\Omega t}]$ soit

$$\boxed{i(t) = -\frac{\Omega SB}{R^2 + L^2\Omega^2} (L\Omega \cos \Omega t - R \sin \Omega t)}.$$

5 Le moment magnétique de la spire est égal à $\vec{m}(t) = i(t) S \vec{n}(t)$, et le couple magnétique auquel la spire est soumise vaut

$$\vec{\Gamma}(t) = \vec{m}(t) \wedge \vec{B} = \|\vec{m}\| \|\vec{B}\| \sin \theta(t) \vec{e}_x \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{\Gamma} = i(t) S B \sin \Omega t \vec{e}_x}$$

d'où

$$\Gamma = i(t) S B \sin \Omega t \quad \text{soit} \quad \boxed{\Gamma = -\frac{\Omega (SB)^2}{R^2 + L^2\Omega^2} (L\Omega \cos \Omega t - R \sin \Omega t) \sin \Omega t}.$$

En moyenne, $\langle \sin^2 \Omega t \rangle = 1/2$ et $\langle \sin \Omega t \cos \Omega t \rangle = 0$, d'où

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{R\Omega(SB)^2}{2(R^2 + L^2\Omega^2)}$$

6 En régime permanent, le couple moteur moyen $\langle \Gamma \rangle$ doit compenser le couple résistant. Le point de fonctionnement du moteur asynchrone correspond donc à la (aux) vitesse(s) de rotation ω telle(s) que $\langle \Gamma \rangle = \Gamma_r$. Les deux cas sont représentés figure 6 : le(s) point(s) de fonctionnement sont situés aux intersections des courbes. Dans le premier cas, un seul point de fonctionnement est possible, et la charge est entraînée à une vitesse de rotation ω légèrement inférieure à ω' . Dans le second cas, deux points de fonctionnement sont envisageables. Celui à plus basse vitesse de rotation est instable : si le couple résistant augmente par exemple sous l'effet d'une perturbation, alors d'après la loi du moment cinétique la vitesse de rotation du moteur diminue ... mais dans ce cas le couple moteur moyen diminue aussi. Le moteur ne peut donc plus entraîner la charge et décroche. Au contraire, pour le point de fonctionnement à plus haute vitesse de rotation, le couple moteur augmente si ω diminue, ce qui permet de compenser la perturbation.

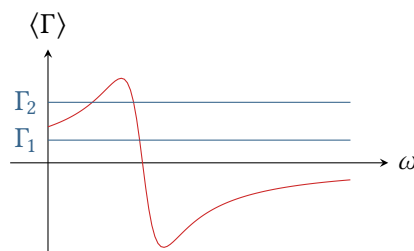


Figure 6 – Points de fonctionnement du moteur asynchrone. Les points de fonctionnement sont les points d'intersection des droites bleues représentant le couple résistant et de la courbe rouge représentant le couple moteur moyen.

Exercice 8 : Pendule pesant conducteur avec induction

3 | 3



- Moment cinétique ;
- Bilan de puissance.

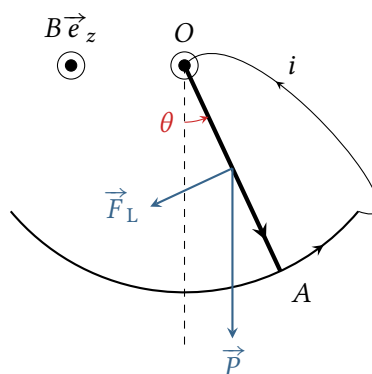


Figure 7 – Pendule conducteur avec induction.

1 Supposons le sens du courant orienté de O vers A dans la tige.

• **Équation mécanique :**

▸ Bilan des actions mécaniques : voir figure 7.

→ Poids de la tige, appliqué en son milieu : en utilisant le bras de levier,

$$\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -mg \times \frac{\ell}{2} \sin \theta.$$

→ force de Laplace :

$$\vec{F}_L = \int i d\ell \vec{e}_r \wedge B \vec{e}_z = -i\ell B \vec{e}_\theta,$$

qui s'applique au milieu de la tige et a donc pour moment

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}_L) = -i\ell B \times \frac{\ell}{2}.$$

Attention, le poids et la force de Laplace s'appliquent au même point mais n'ont pas la même direction, donc pas le même bras de levier.

► Théorème du moment cinétique :

$$\frac{1}{3} m \ell^2 \ddot{\theta} = -mg \frac{\ell}{2} \sin \theta - i \frac{\ell^2}{2} B \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{2}{3} m \ell \ddot{\theta} = -mg \sin \theta - i \ell B.}$$

Le facteur 2/3 du terme d'accélération montre bien qu'un pendule pesant n'est pas équivalent à un pendule simple de même longueur (on aurait eu $m\ell\ddot{\theta}$), ni même à un pendule simple dont toute la masse serait situé au centre de masse ($m\ell\ddot{\theta}/2$).

• **Équation électrique** : Lorsque la tige se déplace d'un angle $d\theta > 0$, elle balaye une fraction d'aire de disque

$$dS = \frac{d\theta}{2\pi} \times \pi \ell^2 = \frac{\ell^2}{2} d\theta.$$

L'aire du circuit *diminue* donc de dS , et le flux magnétique varie de

$$d\Phi = -B dS < 0$$

On en déduit la fém induite

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = +B \frac{dS}{dt} = B \frac{\ell^2}{2} \dot{\theta}$$

Le circuit équivalent ne compte que le générateur induit et une résistance, d'où

$$i = \frac{e_{\text{ind}}}{R} = \frac{B\ell^2}{2R} \dot{\theta}$$

• **Découplage** :

$$\frac{2}{3} m \ell \ddot{\theta} = -mg \sin \theta - \frac{B^2 \ell^3}{2R} \dot{\theta} \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{3}{4} \frac{B^2 \ell^2}{mR} \dot{\theta} + \frac{3}{2} \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0.}$$

2 L'angle étant petit, on linéarise l'équation, ce qui permet d'identifier une forme canonique :

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{3}{4} \frac{B^2 \ell^2}{mR}}_{=\omega_0/Q} \dot{\theta} + \underbrace{\frac{3}{2} \frac{g}{\ell}}_{=\omega_0^2} \theta = 0$$

Il n'y a pas d'oscillation si le régime est apériodique, soit $Q < 1/2$, donc

$$Q = \frac{4mR}{3B^2 \ell^2} \sqrt{\frac{3g}{2\ell}} < \frac{1}{2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{B > \sqrt{\frac{8mR}{3\ell^2}} \sqrt{\frac{3g}{2\ell}} = \sqrt{\frac{32}{3}} \frac{(mR)^{1/2} g^{1/4}}{\ell^{5/4}}.}$$

3 D'après la loi de Lenz, la force de Laplace ne peut être qu'une force de freinage : la tige est ralentie par induction, toute l'énergie mécanique perdue étant dissipée par effet Joule dans la résistance. Le bilan d'énergie s'écrit donc

$$\Delta E_m = -W_J.$$

Je mets un signe $\ominus$ pour avoir $W_J > 0$, ce qui est plus parlant, mais pas obligatoire.

Or la tige est immobile à l'instant initial et à l'instant final, son énergie mécanique s'identifie donc à l'énergie potentielle de pesanteur. Le centre de masse se trouvant à une distance $\ell/2$ de l'axe, elle s'écrit

$$E_{pp} = -mg\frac{\ell}{2} \cos \theta + \text{cte}.$$

Ainsi,

$$W_J = -\Delta E_{pp} = -\left(-mg\frac{\ell}{2} \cos 0 + mg\frac{\ell}{2} \cos \theta_0\right) \quad \text{d'où} \quad \boxed{W_J = \frac{mg\ell}{2}(1 - \cos \theta_0)} > 0.$$

On note que cette énergie ne dépend finalement que de la position initiale, mais ni de R ni de B ni de la présence d'oscillations : le pendule finit toujours par s'arrêter, et donc l'énergie dissipée est forcément égale à l'énergie mécanique initiale. La résistance et le champ renseignent alors sur le taux de dissipation, c'est-à-dire la « vitesse » à laquelle l'énergie est dissipée.

Pour confirmer le raisonnement précédent, on peut réaliser un bilan de puissance et l'intégrer entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$.

Partons des équations électrique et mécanique avant simplification. D'une part,

$$\underbrace{\frac{1}{3}m\ell^2}_{=J} \ddot{\theta} \times \dot{\theta} = -mg\frac{\ell}{2} \sin \theta \times \dot{\theta} - i\frac{\ell^2}{2}B \times \dot{\theta} \quad \text{soit} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(mg\frac{\ell}{2} \cos \theta \right) - i\frac{\ell^2}{2}B \times \dot{\theta}$$

et d'autre part,

$$B\frac{\ell^2}{2}\dot{\theta} \times i = Ri \times i \quad \text{soit} \quad iB\frac{\ell^2}{2} = Ri^2.$$

On peut alors remplacer et réorganiser,

$$\frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2}_{=E_c} - \underbrace{mg\frac{\ell}{2} \cos \theta}_{=E_{pp}} \right) = -Ri^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{dE_m}{dt} = -Ri^2 < 0}$$

L'énergie mécanique de la tige diminue progressivement en étant dissipée par effet Joule : le système réalise un freinage inductif. Par conséquent, en intégrant,

$$W_J = \int_0^{+\infty} Ri^2 dt = - \int dE_m = -\Delta E_m$$

ce qui ramène au calcul précédent.