

Transitoires du premier ordre

Plan du cours

I	Tension aux bornes d'un condensateur soumis à un échelon de tension	1
I.A	Condensateur	1
I.B	Phénoménologie du circuit RC	3
I.C	Équation différentielle	5
I.D	Résolution de l'équation différentielle	6
I.E	Temps de réponse	9
I.F	Analyse énergétique	10
II	Courant dans un condensateur soumis à un échelon de tension	11
II.A	Équation différentielle	11
II.B	Résolution	11
III	Courant dans une bobine soumise à un échelon de tension	11
III.A	Bobine	11
III.B	Temps caractéristique d'un circuit RL	12
III.C	Équation différentielle et résolution	12
IV	Résolution numérique par la méthode d'Euler	13

(R) Résultat à connaître par cœur.

(M) Méthode à retenir, mais pas le résultat.

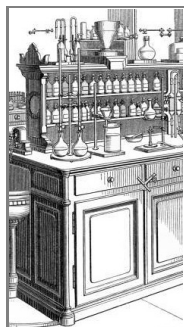
(D) Démonstration à savoir refaire.

(Q) Aspect qualitatif uniquement.

Les paragraphes sans mention en marge sont là pour faciliter votre compréhension ou pour votre culture mais n'ont pas forcément besoin d'être appris en tant que tel.

I - Tension aux bornes d'un condensateur soumis à un échelon de tension

I.A - Condensateur

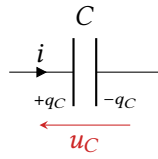


Un peu d'histoire : Au XVIII^e siècle, la découverte du principe de stockage de charges électriques avec la bouteille de Leyde par von Kleist et Musschenbroek marque l'origine des condensateurs. Ces premiers modèles consistaient en deux électrodes séparées par un isolant, configuration encore valable aujourd'hui. L'évolution a conduit aux condensateurs électrolytiques, céramiques, à film ou encore aux supercondensateurs à très forte capacité. Leur rôle est essentiel dans le lissage des tensions des alimentations électriques, le filtrage fréquentiel ou encore le stockage temporaire d'énergie. On les retrouve ainsi dans des capteurs de proximité, les écrans tactiles, les véhicules électriques, les défibrillateurs cardiaques, etc.

I.A.1 - Loi de comportement

R

Un condensateur est constitué de deux armatures conductrices séparées par un isolant.



La charge stockée sur les armatures est reliée à la tension aux bornes du condensateur par

$$q_C = C u_C$$

Le courant « traversant » le condensateur est relié à la tension à ses bornes par

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

La **capacité** du condensateur s'exprime en Farad : $[C] = F$.

-  **Attention !** Ces deux formes de la loi de comportement ne sont valables qu'en convention récepteur, et en définissant $+q_C$ comme la charge de l'armature vers laquelle pointe le sens du courant. Des signes apparaissent dans toute autre configuration.

- Dimensionnellement :

M

$$[C] = \frac{[i]}{[du_C/dt]} = A \cdot s \cdot V^{-1} \dots \text{ou bien directement avec les coulomb et la charge}$$

Espace 1

La dimension d'une dérivée se retrouve avec le taux d'accroissement :

$$\frac{du_C}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_C(t + \Delta t) - u_C(t)}{\Delta t}$$

donc

$$\left[\frac{du_C}{dt} \right] = \frac{[u_C]}{[\Delta t]} = V \cdot s^{-1}.$$

- Si $|q_C|$ et donc $|u_C|$ augmentent, on dit que le condensateur se **charge**. S'ils diminuent, on dit qu'il se **décharge**.

Remarque : Vous apprendrez l'an prochain à relier la capacité d'un condensateur à sa géométrie et au matériau qui le constitue. Retenons que 1 F est une forte capacité : celle des condensateurs de TP varie de quelques pF à quelques μF .

► **Pour approfondir :** Montrons l'équivalence entre les deux formes de la loi de comportement du condensateur. Raisonnons entre deux instants proches t et $t + dt$. La variation de charge $dq_C = q_C(t + dt) - q_C(t)$ du condensateur entre ces deux instants est égale à la charge δq qui a traversé la section du fil la plus proche du condensateur, orientée dans le sens du courant. Par définition de l'intensité (cf. cours E1) on obtient

$$dq_C = \delta q \underset{\text{déf}}{=} i dt \quad \text{soit} \quad i = \frac{dq_C}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$$

puisque $q_C = C u_C$ avec C une constante indépendante du temps. ■

Équivalent en régime permanent :

Régime permanent signifie $u_C = \text{cte}$ donc $i = 0$

Espace 2

R



En régime permanent, un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

Le courant qui le traverse est toujours nul, quelle que soit la tension à ses bornes.

I.A.2 - Énergie stockée par un condensateur

Puissance électrique (algébrique) reçue : Puisque $(u^2)' = 2uu'$, on identifie :

$$\mathcal{P}_C = u_C i = Cu_C \frac{du_C}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu_C^2 \right) = \frac{d\mathcal{E}_C}{dt}$$

D

Espace 3

Travail électrique (algébrique) reçu :

$$W_C = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu_C^2 \right) dt = \frac{1}{2} Cu_C^2(t_2) - \frac{1}{2} Cu_C^2(t_1) = \mathcal{E}_C(t_2) - \mathcal{E}_C(t_1)$$

M

Espace 4

Le travail électrique reçu par un condensateur entre deux instants ne dépend que de la tension à ses bornes à ces deux instants, et pas du tout de la façon dont elle a évolué entre temps (brusquement, lentement, monotone, fluctuante, etc.).

↪ caractéristique de la variation d'une énergie stockée.



L'énergie électrique stockée par un condensateur est reliée à la tension à ses bornes par

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} Cu_C^2$$

R

Conséquence : Une énergie stockée est une grandeur toujours continue au cours du temps : le contraire voudrait dire qu'elle s'échange infiniment vite, donc avec une puissance infinie, ce qui est physiquement impossible.



La tension aux bornes d'un condensateur est toujours continue au cours du temps.

R

I.B - Phénoménologie du circuit RC

I.B.1 - Étude expérimentale

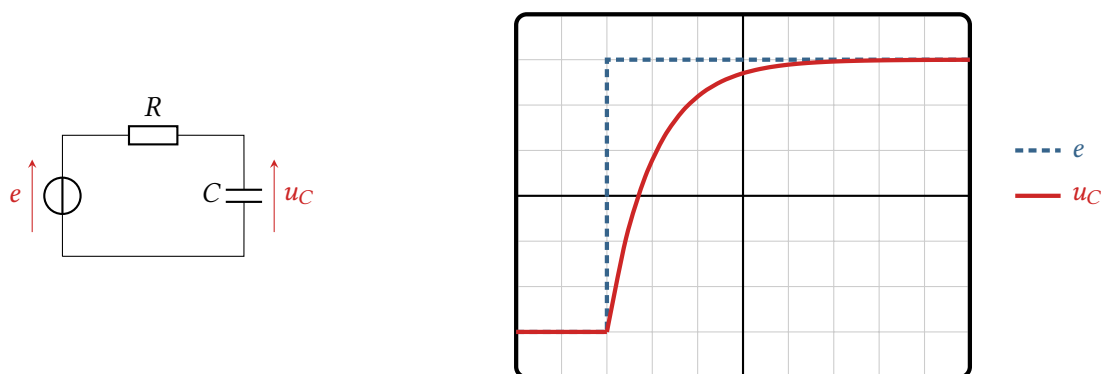


Figure 1 – Étude expérimentale du circuit RC. La tension imposée par le générateur varie instantanément de $e = 0$ à $e = E$ à l'instant $t = 0$, la courbe a été décalée sur l'écran pour bien la visualiser. Dessiner branchement oscillo

Vocabulaire : faire légènder sur le chronogramme

(R)

Le générateur impose un **forçage** au circuit, à laquelle l'évolution de u_C constitue la **réponse**. Ici, le forçage est une tension constante par morceaux : on parle d'un **échelon de tension**.



En **régime établi**, la réponse est du même type que le forçage.

Il s'agit ici de constantes : le régime établi est dit **permanent** ou **continu**.

La réponse évolue lors du **régime transitoire**, qui fait suite à un changement de forçage jusqu'à atteindre un autre régime établi.

I.B.2 - Interprétation des régimes permanents

(M)

Application 1 : Interprétation des régimes permanents

corrigé p. 15

Raisonnons lors d'un régime permanent où $e = E = \text{cte}$. Montrer que l'on a alors $u_C = E$.

I.B.3 - Estimation du temps caractéristique par analyse dimensionnelle

Cherchons maintenant à estimer l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire, en raisonnant par **analyse dimensionnelle**. On note τ le **temps caractéristique** associé.

(M)

► *Identification des paramètres* : de quels paramètres du circuit τ dépend-il probablement ? On cherche une relation sous forme de **loi de puissance**.

$$\tau = \tau(R, C, E) = E^n R^p C^q$$

Espace 5

► *Postulat d'homogénéité* : la relation entre τ et ces paramètres doit être homogène, donc

$$[E^n R^p C^q] = [E]^n [R]^p [C]^q = [\tau] = s.$$

► *Équation aux dimensions* : se ramener aux unités de base (ici V et A) conduit à un système linéaire.

$$[E] = V, [R] = \frac{[U]}{[I]} = V \cdot A^{-1} \text{ et } [C] = \frac{[i]}{\left[\frac{du_C}{dt}\right]} = A \cdot s \cdot V^{-1}$$

ce qui conduit au système

$$\begin{cases} 1 = q & (s) \\ 0 = n + p - q & (V) \\ 0 = -p + q & (A) \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} p = q = 1 \\ n = 0 \end{cases}$$

Espace 6

► **Conclusion :**

$\tau = RC$ quelle que soit l'amplitude E de l'échelon, ce qui se vérifie expérimentalement

Espace 7

→ l'analyse dimensionnelle permet d'aboutir à un résultat peu intuitif en un minimum de calcul !

⇒ **Généralisation :**



Le temps caractéristique d'un circuit dépend uniquement des composants mais pas du forçage qui lui est imposé.



→ ce résultat est en fait général à une grande classe de systèmes allant bien au delà des circuits électriques : les **systèmes linéaires**, dont nous parlerons abondamment dans la suite de l'année.



Attention ! Bien que très puissante, l'analyse dimensionnelle possède néanmoins des limites :

- elle postule une expression sous forme de loi de puissance, ce qui est en pratique presque toujours vrai à notre niveau ... mais il pourrait y avoir une exception ;
- elle ne peut pas prévoir la présence de nombres sans dimension : $1/2$, π , etc.
- elle ne peut pas donner de résultat lorsque deux paramètres de même dimension, p.ex. deux résistances, interviennent car leur rapport est sans dimension.



→ l'analyse dimensionnelle ne fournit pas de résultats exacts, mais seulement des résultats qualitatifs qui permettent d'anticiper les dépendances par rapport à certains paramètres et des ordres de grandeur numériques.

I.C - Équation différentielle

Méthode pour établir une équation différentielle électrique :



- ❶ Utiliser en alternance (une étape sur deux) les lois des mailles/des nœuds et les lois de comportement des dipôles pour modifier l'équation de travail ;
- ❷ À chaque étape, remplacer les grandeurs inconnues et sans intérêt par les grandeurs connues et/ou intéressantes ;
- ❸ Si nécessaire, dériver l'équation de travail pour y insérer certaines lois de comportement ;
- ❹ Toutes les grandeurs qui apparaissent dans les équations doivent être légendées sur le schéma du circuit.



Attention ! Nommer toutes les tensions et tous les courants possibles puis écrire toutes les lois des nœuds et toutes les lois des mailles imaginables **n'est pas du tout une bonne idée** pour arriver au résultat en un temps raisonnable !

Application 2 : Équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur *corrigé*
p. 15



Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C pour $t > 0$, c'est-à-dire une fois que le générateur impose $e = E$. L'écrire sous forme canonique en identifiant le temps caractéristique τ .

(R)

On appelle **forme canonique** d'une équation différentielle une écriture normalisée, faisant apparaître toujours les mêmes paramètres caractéristiques, ce qui facilite les calculs nécessaires à sa résolution.

La forme canonique d'une équation différentielle du premier ordre comme celle ci-dessus portant sur une grandeur s quelconque s'écrit

inverse du
temps caractéristique

préfacteur 1
devant la dérivée

$$\frac{ds}{dt} + \frac{1}{\tau} s = \text{des choses qui dépendent de } e$$

membre de gauche :
ce qui implique la
fonction cherchée
membre de droite ou **second membre** :
le reste = ce qui implique le forçage

Cette équation différentielle est dite

- ▶ **linéaire** : si un forçage $e_1(t)$ donne une solution $s_1(t)$, un forçage $e_2(t)$ une solution $s_2(t)$, alors un forçage $\lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t)$ conduit à une solution $\lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t)$;
- ▶ **du premier ordre** car la dérivée d'ordre le plus élevé est une dérivée première;
- ▶ **à coefficients constants** car τ ne dépend pas du temps.

I.D - Résolution de l'équation différentielle

I.D.1 - Principe général de résolution

On appelle **équation homogène** associée à une équation différentielle l'équation dans laquelle le second membre est nul. Elle s'écrit dans notre cas

$$\frac{ds}{dt} + \frac{1}{\tau} s = 0$$

et ses solutions sont les fonctions de la forme

$$s_H(t) = A e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad A = \text{cte.}$$

(R)

Toute solution d'une équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficients constants s'écrit comme la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière :

$$s(t) = A e^{-t/\tau} + s_P(t).$$

Pour trouver efficacement une solution particulière, on la cherche de la même forme que le forçage, c'est-à-dire ici constante.

Pour identifier la solution « physique » décrivant la réponse du système parmi l'ensemble des solutions mathématiquement possibles, la constante A se détermine en utilisant une **condition initiale** S_0 connue :

$$s(t=0^+) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{S_0} = A \underbrace{e^{-0/\tau}}_{=1} + s_P(0) \quad \text{d'où} \quad A = S_0 - s_P(0).$$

⚡⚡⚡ **Attention !** Les grandeurs électriques peuvent être discontinues ! La condition initiale doit donc être exprimée du « bon côté » de la discontinuité, c'est-à-dire juste après.

⚡⚡⚡ **Attention !** La condition initiale s'applique à la solution *complète*, mais ni à la solution homogène ni à la solution particulière prises isolément.

►► **Pour approfondir :** Allons un peu plus loin mathématiquement. Commençons par s'intéresser à l'équation homogène. Compte tenu des « bonnes propriétés » de l'exponentielle vis-à-vis de la dérivation, cherchons à quelle(s) condition(s) une fonction de la forme $t \mapsto A e^{rt}$ (A et r deux constantes réelles) peut être solution de l'équation homogène. En injectant dans l'équation,

$$r \times A e^{rt} + \frac{1}{\tau} A e^{rt} = 0 \quad \text{soit} \quad r + \frac{1}{\tau} = 0 \quad \text{donc} \quad r = -\frac{1}{\tau}.$$

On montre ainsi que les seules solutions exponentielles de l'équation homogène s'écrivent sous la forme $A e^{-t/\tau}$, avec A une constante quelconque. On peut prouver qu'il n'existe pas d'autre solution que celles-ci.

Considérons ensuite l'équation complète, en notant $g(t)$ le second membre :

$$\frac{ds}{dt} + \frac{1}{\tau} s = g(t).$$

Supposons que l'on en connaisse deux solutions s_1 et s_2 . Montrons que $s_1 - s_2$ est forcément solution de l'équation homogène. En soustrayant les deux écritures de l'équation différentielle pour s_1 et s_2 ,

$$\left(\frac{ds_1}{dt} + \frac{1}{\tau} s_1 \right) - \left(\frac{ds_2}{dt} + \frac{1}{\tau} s_2 \right) = g(t) - g(t) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d(s_1 - s_2)}{dt} + \frac{1}{\tau} (s_1 - s_2) = 0,$$

ce qui prouve le résultat annoncé. Par conséquent, $s_1(t) - s_2(t) = A e^{-t/\tau}$, soit $s_1(t) = A e^{-t/\tau} + s_2(t)$. Ainsi, si l'on connaît une solution particulière s_2 de l'équation complète, on peut reconstruire toutes les autres par ajout d'une solution de l'équation homogène. ■

Méthode pour déterminer une condition initiale électrique :

Il s'agit d'exploiter la continuité de la tension u_C aux bornes d'un condensateur, ou du courant i_L dans une bobine (cf. plus loin).



- ❶ Raisonner à $t = 0^-$ où le régime établi est atteint pour déterminer $u_C(t=0^-)$ ou $i_L(t=0^-)$ en s'appuyant sur un circuit équivalent ;
- ❷ Par continuité, on connaît alors $u_C(t=0^+)$ ou $i_L(t=0^+)$;
- ❸ Raisonner à $t = 0^+$ par loi des mailles et/ou des nœuds pour en déduire la grandeur d'intérêt $s(t=0^+)$.

*** **Attention !** Sauf s'il s'agit d'une grandeur forcément continue, déterminer $s(t=0^-)$ n'a aucun intérêt en raison de l'éventualité d'une discontinuité. C'est toujours possible de le faire ... mais c'est du temps perdu ☺

I.D.2 - Application au circuit RC

Application 3 : Détermination de la tension aux bornes du condensateur

corrigé p. 15

Résoudre l'équation différentielle établie précédemment : en réponse à un échelon de tension $0 \rightarrow E$, pour $t > 0$,

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = \frac{E}{\tau}.$$

- 1 - Déterminer une solution particulière et en déduire la forme générale des solutions de cette équation.
- 2 - Montrer que $u_C(t=0^+) = 0$ et conclure.
- 3 - Représenter graphiquement $u_C(t)$.

Analyse qualitative du résultat :

► pour $t \ll \tau$:

$e^{-t/\tau} \simeq 1$ donc $u_C \simeq 0 \leadsto$ on est encore quasiment sur la condition initiale, le transitoire n'a pas encore commencé.

Espace 8

► pour $t \gg \tau$:

$e^{-t/\tau} \simeq 0$ donc $u_C \simeq E \leadsto$ on est quasiment sur la solution particulière décrivant le régime permanent, le transitoire est terminé

Espace 9

► pour $t \sim \tau$:

pas de simplification possible, on est en plein dans le transitoire

Espace 10

(R)



Le temps caractéristique τ donne l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.

Qualitativement, la solution homogène décrit physiquement le régime transitoire, et est nulle au delà, alors que la solution particulière décrit le régime établi.

*** **Attention !** Il s'agit d'une analyse *qualitative* ! En particulier, la solution particulière est bien présente lors du régime transitoire, qui n'a pas une durée « égale à » τ .

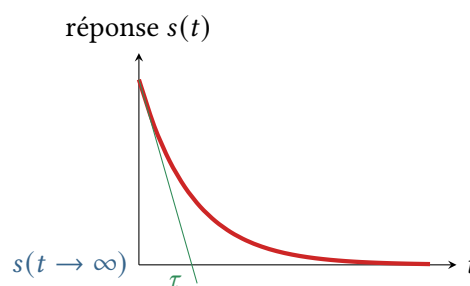
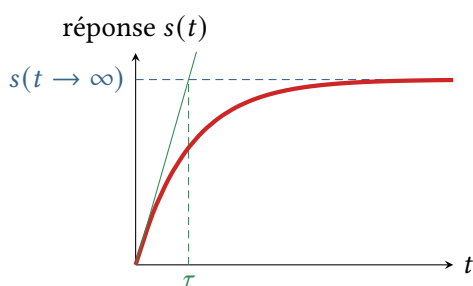
Remarque : La solution particulière a été cherchée sous forme d'une constante, et nous avons montré sans le dire qu'il s'agit de l'unique solution constante de l'équation différentielle. Il est donc naturel qu'elle décrive le régime permanent où toutes les tensions sont constantes.

I.D.3 - Détermination graphique de τ

(R)



Sur tout graphe représentant la réponse d'un système du premier ordre, la tangente à l'origine coupe l'asymptote à l'instant $t = \tau$.



Démonstration sur un exemple : raisonnons sur l'expression établie précédemment,

$$u_C(t) = E \left(1 - e^{-t/\tau} \right).$$

Équation de l'asymptote :

$$u_C \rightarrow E \text{ pour } t \rightarrow \infty$$

Espace 11

Équation de la tangente à l'origine :

► Avec les notations des maths : équation de la tangente en $x = a$ à la courbe représentative d'une fonction f

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) = f(0) + f'(0)x$$

Espace 12

► Avec les notations de la physique :

$$u_{C,\text{tan}} = u_C(0) + \frac{du_C}{dt}(t=0) \times t = 0 + \frac{E}{\tau}t$$

Espace 13

Conclusion :

intersection lorsque $Et/\tau = E$, donc en $t = \tau$.

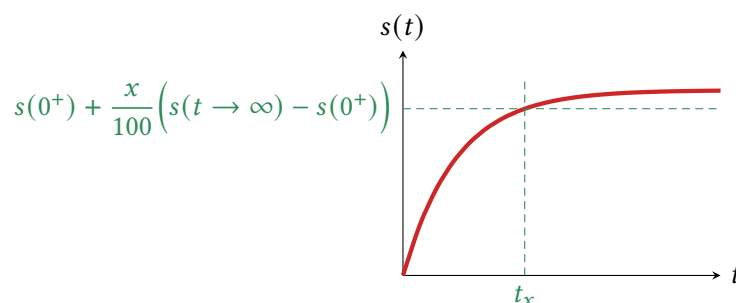
Espace 14

I.E - Temps de réponse

I.E.1 - Définition

On appelle **temps de réponse à $x\%$** , noté t_x , la durée nécessaire pour que $x\%$ du transitoire ait lieu.

$$s(t_x) = s(t=0^+) + \frac{x}{100} \left(s(t \rightarrow \infty) - s(0^+) \right)$$



⚠️ ⚠️ ⚠️ **Attention !** Deux conventions de définition existent : on peut aussi définir t_x comme la durée nécessaire pour que l'écart entre la valeur de s et sa valeur finale soit de moins de $x\%$ de l'écart initial,

$$s(t_x) = s(t \rightarrow \infty) - \frac{x}{100} \left(s(t \rightarrow \infty) - s(0^+) \right)$$

Les valeurs sont alors inversées : le temps de réponse à 95 % dans la première convention devient le temps de réponse à 5 % dans la deuxième, etc.

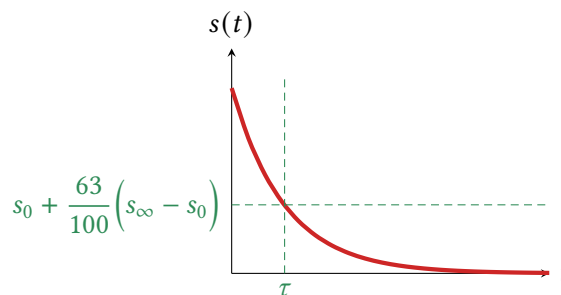
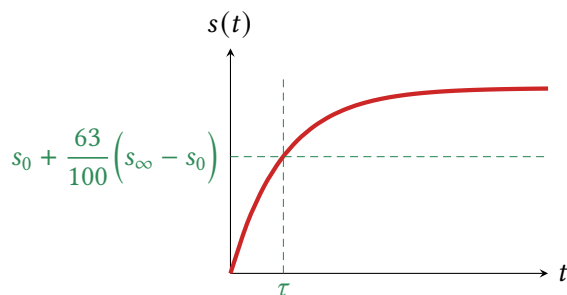
Application 4 : Temps de réponse

corrigé p. 16

Déterminer en fonction de τ le temps de réponse à 95 % et à 99,9 % dans l'exemple du circuit RC.

I.E.2 - Détermination graphique de τ (bis)

Pour tout système du premier ordre, le temps de réponse à 63 % est égal à τ .



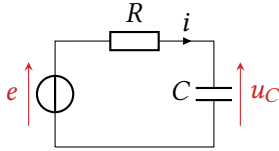
↪ sur des relevés expérimentaux, cette méthode est plus fiable que celle de la tangente à l'origine.

I.F - Analyse énergétique

I.F.1 - Bilan de puissance

Méthode : la puissance échangée par un dipôle est reliée au produit $u \times i$ à ses bornes (fournie si convention générateur, reçue si convention récepteur)

→ tous les dipôles sont ici montés en série, donc multiplier la loi des mailles par i donne directement le bilan de puissance.



$$ei = Ri^2 + u_C i \text{ soit } \mathcal{P}_{g,\text{fournie}} = \mathcal{P}_{\text{Joule}} + \mathcal{P}_C$$

Espace 15

→ la puissance fournie par le générateur est répartie entre la résistance (où elle est dissipée par effet Joule) et le condensateur.

Comme toutes les grandeurs dépendent du temps de manière « quelconque », aller plus loin est peu parlant : dans le cas du circuit RC, un bilan d'énergie est plus intéressant.

I.F.2 - Bilan d'énergie

Rappel : travail électrique échangé par un dipôle

$$\mathcal{P}(t) = \frac{\delta W}{dt} \quad \Longleftrightarrow \quad W = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t) dt.$$

M

Application 5 : Bilan d'énergie du circuit RC

corrigé p. 16

On s'intéresse toujours à la réponse à un échelon $0 \rightarrow E$ du circuit RC, pour lequel on a

$$u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau}).$$

- 1 - Calculer de manière séparée le travail électrique total fourni entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$ par le générateur, l'énergie reçue par le condensateur et l'énergie dissipée dans la résistance.
- 2 - Vérifier la conservation de l'énergie.
- 3 - Définir et calculer le rendement énergétique global.

► **Pour approfondir :** Par définition, une intégrale dont l'une des bornes est infinie est définie comme une limite :

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t) dt.$$

On parle alors d'intégrale *généralisée* ou intégrale *impropre*. Notons que la définition n'a de sens que si la limite existe ... ce qui pose d'intéressantes questions mathématiques, sur lesquelles vous travaillerez l'an prochain. Les intégrales généralisées d'exponentielles auxquelles nous avons affaire ne posent pas de difficulté :

$$\int_0^T e^{-t/\tau} dt = [-\tau e^{-t/\tau}]_0^T = -\tau e^{-T/\tau} + \tau,$$

qui tend vers τ pour $T \rightarrow \infty$.

⇒ **Généralisation :**

On appelle **rendement énergétique** de la charge du condensateur le rapport

$$\rho = \frac{\Delta \mathcal{E}_C}{W_g}$$

Dans le cas d'un échelon de tension, il est toujours égal à 1/2, quels que soient R , C et E .

→ si le but est de stocker de l'énergie dans le condensateur, le charger en imposant un échelon de tension n'est pas la meilleure façon de procéder !

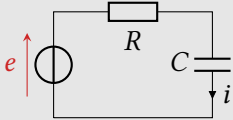
II - Courant dans un condensateur soumis à un échelon de tension

II.A - Équation différentielle

Méthode : lorsque l'on cherche à établir une équation différentielle d'un circuit électrique, il est parfois nécessaire de dériver l'équation de travail pour pouvoir utiliser certaines lois de comportement.

Application 6 : Équation différentielle vérifiée par l'intensité dans un circuit RC

corrigé p. 17



On s'intéresse comme précédemment à un circuit RC soumis à un échelon de tension $0 \rightarrow E$ à l'instant $t = 0$. Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i dans le circuit pour $t > 0$ et l'écrire sous forme canonique.

⇒ Généralisation :



Le temps caractéristique est propre à un système physique, quelle que soit la grandeur mesurée du sein de ce système.



II.B - Résolution

Méthode : lorsque l'on s'intéresse à une grandeur qui peut être discontinue, la recherche de la condition initiale nécessite d'abord de l'exprimer en fonction de la grandeur continue puis d'utiliser la continuité pour conclure.

Application 7 : Intensité dans le circuit RC

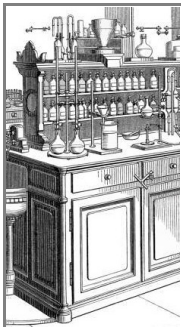
corrigé p. 17



Résoudre l'équation différentielle précédemment établie, et représenter graphiquement $i(t)$.

III - Courant dans une bobine soumise à un échelon de tension

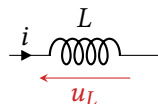
III.A - Bobine



Un peu d'histoire : Les bobines sont des composants électriques formés d'un enroulement de fil conducteur, souvent plusieurs centaines de mètres. Leur fonctionnement a été compris au XIX^e siècle grâce aux travaux de Michael Faraday et Joseph Henry sur les phénomènes d'induction, que nous étudierons en fin d'année. Essentielles dans les circuits oscillants, les transformateurs et les filtres radiofréquence, on les retrouve dans les alimentations à découpage, les moteurs électriques, les chargeurs sans fil, ou encore des appareils médicaux comme les IRM. En revanche, leur grande taille et leur masse imposante les rend peu commodes dans les petits circuits électroniques, où elles sont remplacées par des circuits intégrés qui simulent le même comportement.

III.A.1 - Loi de comportement

Une bobine est constituée d'un long fil conducteur enroulé sur lui-même, ce qui génère un champ magnétique et des phénomènes inductifs à l'intérieur.



Sa loi de comportement en convention récepteur s'écrit

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

L'**inductance** de la bobine s'exprime en Henry : $[L] = \text{H}$.



(M)

Dimensionnellement,

$$[L] = \frac{[u]}{[di/dt]} = V \cdot s \cdot A^{-1}$$

Espace 16

Équivalent en régime permanent : $i = \text{cte}$ donc $u_L = 0$

Espace 17

(R)



En régime permanent, une bobine est équivalente à un fil.
La tension à ses bornes est nulle, quel que soit le courant qui la traverse.

III.A.2 - Énergie stockée par une bobine

(D)

Puissance électrique (algébrique) reçue : Puisque $(u^2)' = 2uu'$, on identifie :

$$\mathcal{P}_L = u_L i = L \frac{di}{dt} i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right) = \frac{d\mathcal{E}_L}{dt}$$

Espace 18

Même sans passer par un calcul de travail électrique, que la puissance s'exprime comme une dérivée donne l'expression de l'énergie stockée dans la bobine.

(R)



L'énergie magnétique stockée par une bobine est reliée au courant qui la traverse par

$$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L i^2$$

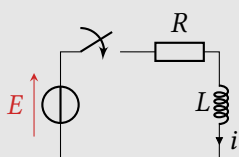
Une énergie stockée ne pouvant être discontinue, le courant traversant une bobine est toujours continu.

III.B - Temps caractéristique d'un circuit RL

(M)

Application 8 : Analyse dimensionnelle d'un circuit RL

corrigé p. 17



On s'intéresse au circuit ci-contre, dans lequel un générateur de tension constante E alimente un circuit RL. L'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$.

En raisonnant par analyse dimensionnelle, identifier le temps caractéristique du circuit.

III.C - Équation différentielle et résolution

(M)

Application 9 : Transitoire d'un circuit RL

corrigé p. 18

Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par le courant i dans le montage de l'application 8.

IV - Résolution numérique par la méthode d'Euler

• Un exemple problématique

Nous nous sommes concentrés jusqu'à présent sur la réponse de circuits à des échelons de tension, ce qui permet une résolution analytique (= à la main). Supposons maintenant que l'on souhaite étudier par exemple la réponse d'un circuit RC à une rampe de tension de durée T , comme schématisé figure 2.

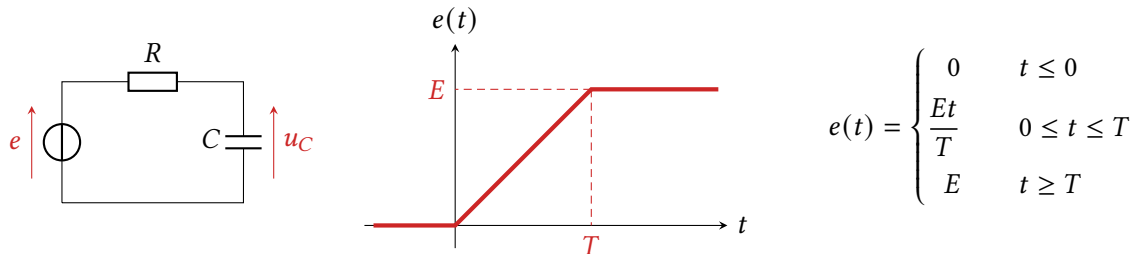


Figure 2 – Rampe de tension.

La mise en équation est exactement identique à ce qui précède, si ce n'est que $e(t)$ dépend du temps différemment :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = \frac{e(t)}{\tau}.$$

La résolution devient toutefois nettement plus technique, car il y a deux changements de forçage, donc deux solutions à déterminer différemment et à raccorder par continuité à l'instant $t = T$. C'est faisable à la main, mais ... si on ne s'intéresse qu'à des aspects qualitatifs et/ou des valeurs numériques, passer à une résolution numérique est profitable.

• Schéma d'Euler explicite

Comme il n'est pas possible de résoudre une équation différentielle « à tout instant » avec un ordinateur, il est nécessaire de passer par une résolution à N **instants discrets** $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots, t_{N-1}$ séparés d'un **pas de temps** Δt ($t_n = n \Delta t$), en cherchant à ce que la valeur obtenue numériquement u_n soit aussi proche que possible de ce que donnerait la solution analytique $u(t_n)$.

Remarque : formellement, la discrétisation revient à transformer la recherche d'une fonction $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en celle des éléments d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

En pratique, il faut transformer l'équation différentielle en une relation de récurrence permettant de calculer u_{n+1} à partir uniquement de ce que l'on connaît, c'est-à-dire la tension aux instants passés $u_n, u_{n-1}, \dots$, la tension de forçage à tout instant et les paramètres caractéristiques du système. La « recette » pour passer de l'équation différentielle à la relation de récurrence est appelée **schéma numérique**.

Schéma d'Euler explicite :

La dérivée est approximée par un taux d'accroissement entre les instants t_n et t_{n+1} , et toutes les autres grandeurs sont prises à l'instant t_n .

Application à l'exemple précédent :

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} + \frac{1}{\tau} u_n = \frac{1}{\tau} e(t_n) \quad \text{soit} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{\tau} (e(t_n) - u_n).$$

Remarque : Bien sûr, il existe des schémas numériques plus astucieux, plus précis et/ou plus rapides, d'où l'intérêt d'utiliser des fonctions issues de bibliothèques. Nous le ferons un peu plus tard dans l'année.

• Exemple de code Python

Pour un même schéma numérique, c'est-à-dire un même algorithme, il existe de nombreuses implémentations, c'est-à-dire de nombreuses façons d'écrire un code qui répond à la problématique. Voici une proposition de code relativement simple, basée sur l'utilisation de listes.

M

```

1  ### DEFINITION DES PARAMETRES PHYSIQUES :
2  R = 1e3          # en ohms
3  C = 1e-6         # en farad
4  tau = R*C        # en secondes

6  E = 2            # amplitude de la rampe, en volts
7  T = 1e-3         # durée de la rampe, en s

9  ### PARAMETRES DE LA SIMULATION :
10 dt = 2e-5        # pas de temps, en s
11 N = 500          # nbre de pas de temps

13 ### INITIALISATION DES LISTES :
14 t = [n*dt for n in range(N)]      # tps, en secondes
15 u = [None for n in range(N)]      # tension du condensateur, en V
16     # tout est initialisé à None, c-a-d "rien du tout"

18 ### REMPLISSAGE DE LA LISTE e
19 def e(t):
20     if t <= 0:
21         return 0
22     elif t <= T:
23         return E*t/T
24     else:
25         return E

27 ### RELATION DE RECURRENCE
28 u[0] = 0 # condition initiale
29 for n in range(N-1):
30     u[n+1] = u[n] + dt/tau * (e(t[n]) - u[n])

```

Quel est le rôle des lignes 14 et 15 ?

Construire des listes de bonne taille, ce qui permet ensuite de les parcourir (et de les remplir !) par indice.

Espace 20

Pourquoi une seule inégalité à la ligne 22 et pas du tout à la ligne 24 ?

On ne fait ce test que si le précédent a répondu False, donc pas de risque d'écraser par erreur une bonne valeur

Espace 21

Pourquoi la boucle **for** de la ligne 29 s'arrête-t-elle à $N - 1$ au lieu de N ?

On remplit ensuite le $n + 1^{\text{e}}$ élément de la liste, qui n'en compte que N , il faut donc s'arrêter à $N - 1$ pour ne pas sortir de la liste.

Espace 22

Éléments de correction des applications de cours

*Ces corrections sont parfois incomplètes, et presque toujours moins détaillées que ce qui est présenté en classe.
Vos notes de cours sont donc l'outil à privilégier pour les travailler, davantage que le présent document.*

Application 1 : Interprétation des régimes permanents énoncé p. 4

D'après la loi des mailles,

$$e = Ri + u_C$$

En régime permanent, le condensateur équivaut à un interrupteur ouvert, donc $i = 0$, d'où

$$u_C = E,$$

ce que l'on constate expérimentalement.

Application 2 : Équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur énoncé p. 5

Loi des mailles :

$$u_R + u_C = E$$

La tension u_C est celle que l'on cherche et E un paramètre : on les conserve donc. En revanche, la tension u_R est une inconnue inintéressante, que l'on fait disparaître par une loi de comportement, et on réitère pour faire disparaître l'intensité :

$$Ri + u_C = E \quad \text{d'où} \quad RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E.$$

Écriture sous forme canonique :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{E}{RC}$$

ce qui conduit à identifier $\tau = RC$.

Application 3 : Détermination de la tension aux bornes du condensateur énoncé p. 7

1 Le second membre étant constant, cherchons une solution particulière $u_{C,p}$ constante :

$$0 + \frac{1}{\tau} u_{C,p} = \frac{E}{\tau} \quad \text{soit} \quad u_{C,p} = E.$$

On en déduit que les solutions de l'équation différentielle sont toutes les fonctions de la forme

$$u_C(t) = A e^{-t/\tau} + E.$$

2 Recherche de la condition initiale : ❶ À l'instant $t = 0^-$, le régime permanent est atteint donc le condensateur équivaut à un interrupteur ouvert, et $e = 0$. D'après la loi des mailles,

$$u_C(0^-) + Ri(\cancel{0}) = e(0^-) = 0 \quad \text{soit} \quad u_C(0^-) = 0.$$

❷❸ Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur,

$$u_C(0^+) = 0.$$

Détermination de A :

$$u_C(0^-) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{A + E} = 0 \quad \text{soit} \quad A = -E$$

Conclusion :

$$u_C(t) = -E e^{-t/\tau} + E \quad \text{soit} \quad \boxed{u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau})}.$$

3 Pas besoin de raisonnement compliqué : allure d'exponentielle partant de la condition initiale et tendant vers la solution particulière.

Application 4 : Temps de réponse énoncé p. 9

Dans ce cas

$$u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{donc} \quad u_C(t_x) = 0 + \frac{x}{100}(E - 0) = \frac{x}{100}E$$

On résout alors

$$\frac{x}{100} = 1 - e^{-t_x/\tau} \quad \text{soit} \quad e^{-t_x/\tau} = 1 - \frac{x}{100} \quad \text{donc} \quad \boxed{t_x = -\tau \ln \frac{100 - x}{100}}.$$

On a alors

$$t_{95} = -\tau \ln 0,05 \simeq 3\tau \quad \text{et} \quad t_{99,9} = -\tau \ln 0,001 \simeq 6,9\tau$$

ce qui confirme τ comme l'ordre de grandeur de la durée du transitoire.

Application 5 : Bilan d'énergie du circuit RC énoncé p. 10

1 Commençons par calculer le courant i au cours de la charge,

$$i = C \frac{du_C}{dt} = -CE \frac{d}{dt} (e^{-t/\tau}) = -CE \times \frac{-1}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}.$$

Travail électrique fourni par le générateur :

$$W_g = \int_0^{+\infty} \frac{E^2}{R} e^{-t/\tau} dt = CE^2.$$

Il peut également être calculé de manière un peu plus astucieuse :

$$W_g = EC \int_0^{+\infty} \frac{du_C}{dt} dt = EC [u_C(t \rightarrow \infty) - u_C(t=0)] = CE^2$$

Travail électrique reçu par le condensateur : égal à sa variation d'énergie,

$$\Delta \mathcal{E}_C = \frac{1}{2} CE^2 - 0.$$

Travail électrique dissipé par effet Joule :

$$W_J = \int_0^{+\infty} \frac{E^2}{R} e^{-2t/\tau} dt = \frac{1}{2} CE^2.$$

2 On trouve bien

$$W_g = \Delta \mathcal{E}_C + W_J$$

L'énergie apportée par le générateur est ou bien stockée dans le condensateur ou bien dissipée par effet Joule.

3 On pose

$$\rho = \frac{\Delta \mathcal{E}_C}{W_g} = \frac{1}{2}.$$

Application 6 : Équation différentielle vérifiée par l'intensité dans un circuit RC . énoncé p. 11

D'après la loi des mailles pour $t > 0$,

$$E = u_R + u_C$$

On souhaite faire disparaître u_C au profit de l'intensité i par la loi de comportement du condensateur, ce qui nécessite de dériver d'abord l'équation de travail :

$$\frac{du_C}{dt} + R \frac{di}{dt} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{i}{C} + R \frac{di}{dt} = 0$$

et en réorganisant pour faire apparaître la forme canonique

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \underbrace{\frac{1}{RC}}_{=1/\tau} i = 0,}$$

ce qui conduit à identifier $\tau = RC$.

Application 7 : Intensité dans le circuit RC énoncé p. 11

L'équation différentielle s'écrit

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = 0.$$

Forme des solutions : il s'agit d'une équation homogène (autrement dit la solution particulière est nulle), donc

$$i(t) = A e^{-t/\tau}.$$

Condition initiale : l'intensité dans un condensateur n'a pas de raison d'être continue : $i(0^+) \neq i(0^-)$. La déterminer demande donc de l'exprimer en fonction de la seule grandeur continue : u_C ... mais tout le travail est déjà fait ou presque, car il ne s'agit que de réutiliser les lois des mailles et des nœuds, écrites à l'instant 0^+ .

$$E = Ri(0^+) + u_C(0^+)$$

Or on a montré précédemment (ou on retrouve) que $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$, si bien que

$$i(0^+) = \frac{E}{R} \neq i(0^-) = 0.$$

Par conséquent,

$$i(0^+) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} \frac{E}{R} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} A e^{-0/\tau} \quad \text{d'où} \quad \boxed{i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau} .}$$

Application 8 : Analyse dimensionnelle d'un circuit RL énoncé p. 12

- ▷ Paramètres pertinents : $\tau = \tau(R, L, E)$ probablement
- ▷ Recherche sous forme d'une loi de puissance : $\tau = R^n L^p E^q$
- ▷ Équation aux dimensions :

$$[\tau] = (V \cdot A^{-1})^n \times (V \cdot s \cdot A^{-1})^p \times (V)^q \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} 1 = p & \text{(s)} \\ 0 = n + p + q & \text{(V)} \\ 0 = -n - p & \text{(A)} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} p = 1 \\ n = -1 \\ q = 0 \end{cases}$$

- ▷ Conclusion : $\tau = \frac{R}{L}$, qui comme on pouvait s'y attendre par analogie avec le circuit RC dépend uniquement des composants du système et pas du tout du forçage.

Application 9 : Transitoire d'un circuit RL **énoncé p. 12**

Équation différentielle : pour $t > 0$, l'interrupteur est fermé donc

$$E = Ri + u_L = Ri + L \frac{di}{dt} \quad \text{d'où} \quad \frac{di}{dt} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{=1/\tau} i = \frac{E}{L}$$

Résolution :

► Forme générale des solutions :

$$i(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{E}{R}$$

► Condition initiale : par continuité du courant dans une bobine, et puisque l'interrupteur est ouvert pour $t < 0$,

$$i(0^+) = i(0^-) = 0 \quad \text{donc} \quad i(0^+) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CI}}}{=} 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{expr}}}{=} A + \frac{E}{R}$$

► Conclusion :

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-t/\tau} \right).$$

Expériences de cours envisageables

Une belle liste ne vaut pas engagement à tout faire tous les ans ☺

Circuit RC série

- ☐ GBF;
- ☐ Carte d'acquisition + LatisPro;
- ☐ Résistance variable p.ex. boîte de résistances, ou bien AOIP $\times 1 \text{ k}\Omega$;
- ☐ Condensateur $\approx 100 \text{ nF}$;
- ☐ Fils de couleur.